

9385

Bibl. Jag.

II







III 3  
Wystawy Jaceuckie  
we Wiedniu

zima 1898/1899

"Wsktorem in. Qualifications"



Przy równując obydwa te wyrażenia wyrażenia  $\bar{v}$  otrzymujemy

$$m \cdot v_m \left\{ \frac{\mu}{m} \frac{v_m}{v_m} - \left[ \frac{\bar{v}^2}{16} + \frac{1}{2} \frac{\mu}{m+\mu} \right] \frac{\mu}{m} \frac{v_m}{v_m} + \frac{1}{2} \frac{\mu}{m+\mu} \right\} = \left[ \frac{\bar{v}^2}{16} + \frac{1}{2} \frac{\mu}{m+\mu} \right] R \bar{v}$$

Teraz  $\bar{v}$  jest średnią drogą elektronu do średniej szybkości  $\bar{v}$ , między dwoma zderzeniami gdzie  $\bar{v} = \frac{\lambda}{\tau}$  skąd:

$$\bar{v} = \frac{R \cdot \lambda}{m \cdot v_m} \cdot \frac{1}{\frac{\frac{\mu}{m+\mu}}{\frac{\bar{v}^2}{16} + \frac{\mu}{m+\mu}} + \frac{\frac{\mu}{m}}{\frac{\bar{v}^2}{16} + \frac{\mu}{m+\mu}} \cdot \frac{v_m}{v_m} - \frac{\mu}{m} \frac{v_m}{v_m}}$$

Lat oznaczając przez  $W$  drugi mnożnik

$$\bar{v} = \frac{R \cdot \lambda}{m \cdot v_m} \cdot W$$

C. do średniej drogi  $\bar{v}$  trzeba zrobić następującą uwagę. Z powodu tego przypuścił, że wszystkie cząsteczki są w stanie drgań, a więc ich średnia prędkość jest w środku drgań i możemy przypuścić, że średnia droga elektronu jest średnią drogą między dwoma zderzeniami cząsteczek. Jedynym zaskakującym w tym rozumowaniu jest przypadek wyprowadzenia przez Clausiusa, jako wyrazu średniej drogi  $\bar{v}$  będzie stąd niepoprawione wyrażenie średniej drogi dane przez Clausiusa. A zatem,

$$\lambda = \frac{\bar{v}}{2 \pi \nu \left( \frac{v + s}{2} \right)^2}$$

gdzie  $v$  jest częstotliwością drgań cząsteczek,  $s$  - średnia elektronowa, a  $\nu$  - średnia częstotliwość.

Gdy mamy do czynienia z elektronami, używamy  $\tau$  jest czasem między zderzeniami  $s$  a zatem

$$\lambda = 4 \cdot \frac{\bar{v}}{2 \pi \nu \cdot s^2}$$

Średnia droga elektronu używanego w przewodniku jest  $\bar{v}$  (podczas prądu) niż 4 razy większa od średniej drogi między zderzeniami.

Przyjmijmy że tylko elektrony używane przez uderzeń w prądzie, a więc jest bardzo mało w porównaniu do  $n$ , które jest  $n$

$$W = \left[ \frac{4 \cdot \frac{\mu}{m+\mu}}{\frac{\bar{v}^2}{16} + \frac{\mu}{m+\mu}} \right]^{-1} \frac{\bar{v}^2}{4} \frac{m}{\mu}$$

a zatem

$$\bar{v} = \frac{R \cdot \lambda}{m \cdot v_m} \cdot \frac{\bar{v}^2}{4}$$



1

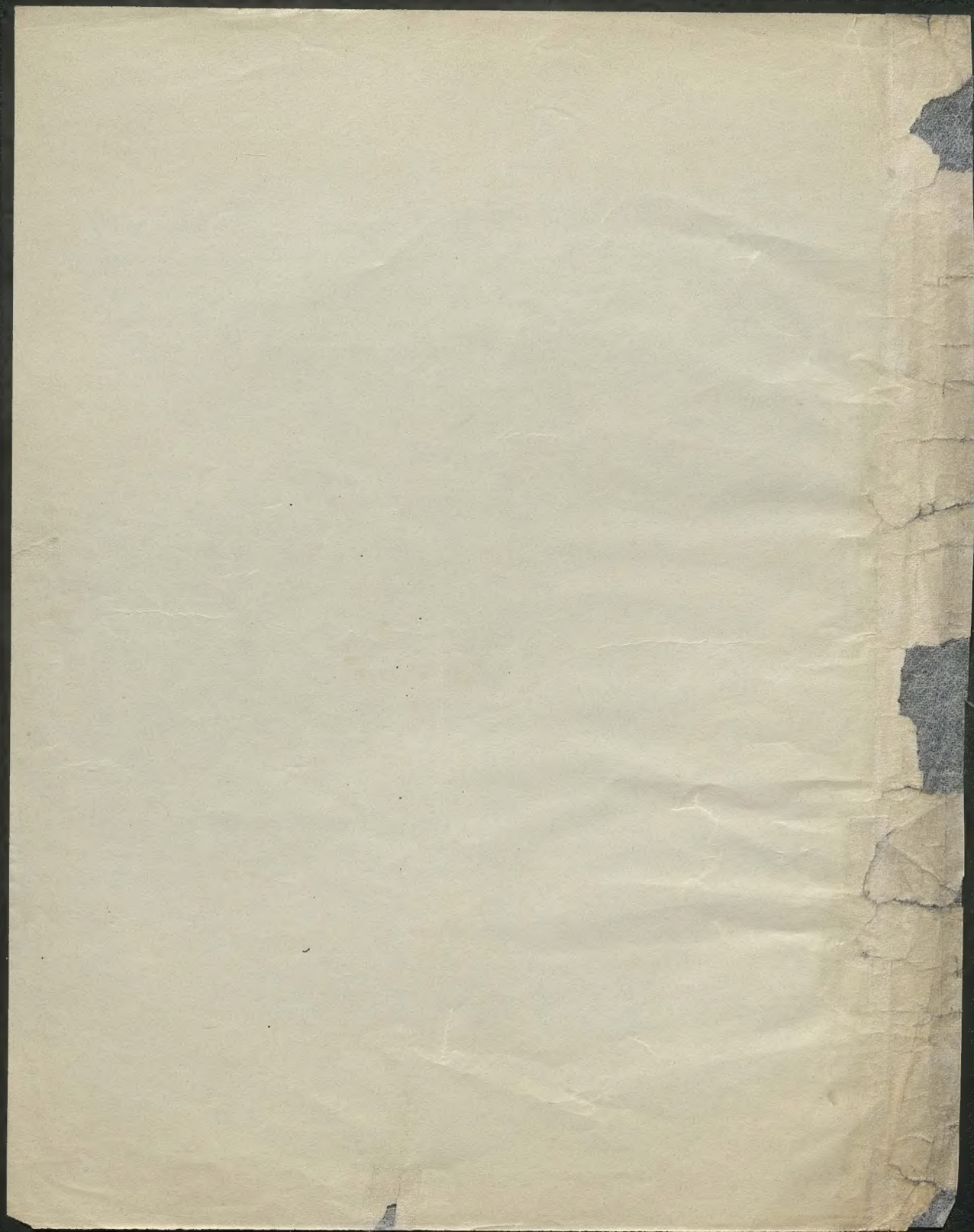
# Vektoren u. Quaternionen-Rechnung

mit Anwendungen auf Physik

Winter Semester 1898/99

(Wien)







Mein Herr!

1  
2

Ich trete <sup>diesmal</sup> ~~heute~~ vor Ihnen in der Rolle eines Advocaten auf, nämlich eines Advocaten für die Vektor- und Quaternionen-Rechnung. Ich will nämlich Propaganda machen für diese mathematische Disziplin, welche noch lange nicht im Unterricht und in der Forschung die ihr gebührende wichtige Stellung eingenommen hat. Es scheint mir dies immer noch nöthig zu sein, obwohl heutzutage diese Lehre schon eines gewissen Ansehens erfreut und ihre Nützlichkeit und Bedeutung insbesondere für die Physik wohl von Niemanden, der sich überhaupt damit beschäftigt hat, geleugnet wird. Es bleibt aber meist bei dieser platonischen Anerkennung, selten aber nimmt sich jemand die Mühe sich hinzusetzen und diese Rechnungsart soweit zu lernen, dass er wirklich in Stande ~~ist~~ <sup>ist</sup> damit zu operiren, ~~und~~ <sup>und</sup> dass er ~~da~~ einen wirklichen Profit davon hält.

Aufrechter gesagt, kann man dies den Mathematikern und Physikern auch gar nicht so übel nehmen, denn bis in die neueste Zeit fehlte es vollständig an geeigneten Lehrbüchern, welche die Grundlagen dieser neuen Methode in leicht verständlicher Weise darlegten <sup>hätte</sup> und man musste sein Zuflucht nehmen zu den furchtbar gründlichen dickblättrigen Originalwerken, was natürlich nicht jedermanns Sache war. Auch jetzt geht es noch kein wirklich praktisches Lehrbuch, welches ~~ich Ihnen~~ <sup>als</sup> ~~ist~~ <sup>vollständig</sup> für das Studiren genügt <sup>würde</sup> ~~empfehlen könnte~~, leichtverständlich wäre und dabei



aber für einzelne Theile dieser Wissenschaft und für spezielle Anwendungen  
gibt es schon einige ganz vortreffliche Bücher. Auf darauf werde ich  
später noch zurückkommen.

~~Jetzt glaube ich aber, dass sie anfangen sein werden zu werden, wenn sie  
Kanten und Funktionen. Aber jetzt ist das nicht der Fall und sie  
sich bestet. Wenn ich nun ein Philosoph wäre, so würde ich eine sehr  
gelehrte Definition an die Spitze stellen, <sup>wie ich Hermann thut</sup> und sie würden dann wohl ebenso  
klar sein wie zuvor. Da ich aber Physiker bin, so hätte ich es für praktischer  
eine kurze Darlegung des historischen Entwicklungsganges dieser Lehre  
zu geben, <sup>Ich bin in anderer Hinsicht ungenau</sup> ~~und~~ <sup>das</sup> was man damit eigentlich anfangen soll und zugleich  
wie sie einen pflegt man zwei ~~zwei~~ <sup>zwei</sup> Arten von Geometrie zu  
unterscheiden, welche ihrem Wesen nach selbstverständlich gleich, aber der  
Methode nach ganz verschieden sind, die synthetische Geometrie  
(Euclid, projective Geometrie etc.) und die analytische G., welche bekanntlich  
von Descartes erfunden wurde. Die letztere hat sich bisher ~~als~~  
für die Physik allein brauchbar erwiesen. Man kann ja mit  
unter gewisse <sup>physikalische</sup> ~~Sätze~~ auf recht elegante Weise synthetisch ablesen  
(v.B. Optik Strahlensystem, Beweis dass eine Hohlkugel auf einem Punkt  
des Innern kein Kraft ausübt etc.) <sup>mir dem was ich</sup> ~~hat~~ aber dass sind doch nur  
verinselte Kunststücke, welche ~~auf gewisse~~ <sup>zu</sup> sich nicht in allgemein  
anwendbare Methode zusammenfassen lassen.~~



3

<sup>Fast</sup>  
~~In der Physik~~ Die ganze mathematische Physik ~~besteht~~ ist mittelst Zuhilfenahme der analytischen Geometrie entwickelt worden, und wie wir sehen kann man es damit auch ziemlich weit bringen. Die Methode hat aber unstreitig auch gewisse Nachteile. ~~Man muss~~ Sie ist eigentlich doch ein recht plummes schwer zu gebrauchendes Instrument, verbraucht <sup>überflüssigweise</sup> viel Papier, Tinte und Zeit. Es fällt jedem Anfänger sofort als sehr unpraktisch auf, dass man <sup>(dort wo es sich um Richtungsgrößen handelt)</sup> jede Beziehung dreimal hinschreiben muss indem man die Gleichung für die Komponenten nach den 3 Axen aufstellen muss. Also z.B. in der Mechanik die Gleichgewichtsbetrachtungen

für ein starres System

$$\begin{array}{ll} \sum X = 0 & \sum (Yz - Zy) = 0 \\ \sum Y = 0 & \sum (Zx - Xz) = 0 \end{array}$$

<sup>Man braucht sich immer klar die erste Gleichung zu merken</sup>  
 (Die zweite und dritte Gleichung gewinnt man einfach durch cyclische Permutation oder v.B. die ~~Maxwell'schen~~ Maxwell'schen Grundgleichungen für die Elektrizität)

$$\mu \frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} \quad \kappa \frac{\partial X}{\partial t} = \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} \quad \text{u. s. w.}$$

Das ist sehr zeitraubend und erschwert die Übersicht, und überhaupt ist es etwas uns nicht zusehens, dass man um einen Gedanken auszudrücken drei Gleichungen hinschreiben muss. Man könnte nun versuchen, jedoch an Stelle der drei Gleichungen eine einzige symbolische Gleichung hinzusetzen, welche stillschweigend alle drei repräsentieren soll.

$$\sum p = 0 \quad \sum V_x p = 0$$



Man würde nun finden, dass man mit diesen Symbolen, welche man eigentlich nur zur Abkürzung eingeführt hat, ebenso gut oder eigentlich noch viel besser und bequemer rechnen kann als ~~man die~~ <sup>indem man die</sup> Komponenten jedesmal explizit hinschreibt. In dieser Weise ~~kennt~~ <sup>würde</sup> man nun ~~die~~ <sup>zur Aufstellung</sup> ~~ganze~~ Vektorrechnung, ja auch die Quaternionen Rechnung ~~stellt~~ <sup>plant</sup>, indem man von der Cartesischen analytischen Geometrie ausgeht und überall möglichst Abkürzung der Schreiberei und Übersichtlichkeit anstrebt. Trotzdem ist die <sup>Quaternionen</sup> Form jener Gleichungen:

$$\sum p = 0 \quad \sum V p = 0 \quad \mu \frac{\partial h}{\partial t} = -\text{curl } e \quad \mu \frac{\partial e}{\partial t} = \text{curl } h - h e$$

~~Dies hat uns nicht~~

Dieser Vortheil, dass man die viele Schreiberei erspart und das ganze leicht übersichtlich fassen hat, vor allen Dingen natürlich befruchtet, ist far nicht gering anzuschlagen. Man kann fast so sagen: alles was man

$p$  stellt uns hier nicht irgend eine Kraft component vor, sondern die Kraft selbst in Größe und Richtung. Das Zeichen  $V$  ersetzt ~~die~~ <sup>eine</sup> komplizierte Schreiberei, curl die gewöhnlichen Differential-Ausdrücke. Es ist eben das Kern der Vektor Rechnung dass man anstatt der Component einer <sup>gewählten</sup> ~~Sich~~ diese ~~Sich~~ selbst betrachtet und dass man einfache Symbole einführt für einfache, geometrisch und physikalisch einfach zu interpretierende Operationen, deren Darstellung in der analytischen Geometrie sehr langwierig ist. mittelst Vektor Rechnung ausgerechnet könnte man auch mittelst der alten analytischen Geometrie ausrechnen, aber das ist noch kein Sympetris



gegen die Nützlichkeit unseres Verfahrens. Ich erinnere sie daran, dass 5  
4  
jeder Fortschritt in der Mathematik von solchen Abkürzungen, Schöpfungen  
von neuen Symbolen und somit auch neuen Begriffen, welche das  
complicirtere auf einmal umfassen, eingegangen ist. Diejenigen unter  
Ihnen, welche mit hoher Mathematik vertraut sind, kennen gewiss  
die Kugelfunctionen, elliptischen Functionen, Theta Functionen,  
J-Function etc. etc. Es sind das alles nur Abkürzungen ~~oder~~  
wenn man will symbolische Bezeichnungen von unendlich langen Reihen, oder  
anderen complicirten Ausdrücken, mit welchen man sonst schwer umgehen  
kann, und die Einführung eines jeden dieser neuen Begriffe hat einen neuen Fort-  
schritt in der Mathematik hervorgerufen. Die meisten von Ihnen werden  
~~Ich~~ wissen, was die Determinanten sind

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \dots$$

~~Es ist nicht weiter als eine abgekürzte Bezeichnung für eine gewisse~~  
Summe von Producten <sup>welche eine sehr leichte Rechnung sein</sup> ~~und Constanten~~ <sup>besteht</sup>, während  
man mit dem expliciten hingeschriebenen Ausdruck absolut nicht umgehen  
könnte. Wir brauchen übrigens gar nicht so weit zu gehen; ~~ein~~ beispielsweise  
ist ja auch unsere ganz gemeine Multiplication  $a \cdot b$  nichts weiter als ein  
Symbol, welches bedeutet:  $\underbrace{b + b + b + \dots}_{a \text{ mal}}$

Wir könnten eigentlich somit fast jede Multiplication in der Mathematik  
durch Addition ersetzen und trotzdem brauche ich wohl nicht erst auseinander



6  
was für einen Fortschritt eben die Einführung des Begriffes der Multiplikation  
herbeigeführt hat. Ebenso verhält es sich mit unserer Rechnungsart, ~~in~~  
man könnte sie als einen Ersatz oder, besser gesagt, als eine Verbesserung  
der Methode der analytischen Geometrie bezeichnen, welche gestattet  
die Rechnungen mit Raumgrößen viel kürzer und bequemer anzuführen,  
welche sich der geometrischen und physikalischen Anschauung viel  
besser ~~ange~~ anschließen wie jene und welche eine Menge von ~~alten~~ neuen Begriffen  
einführt, die ~~es~~ namentlich für die physikalische Anschauung von  
großem Nutzen sind. Sie steht aber nicht im Gegensatz zur analytischen  
Geometrie, insofern man kann sofort jede Formel der Vektor-  
Rechnung umschreiben in die Form der analytischen Geom. und wenn  
man es nützlich findet, <sup>was allerdings sehr selten vorkommt</sup> kann man mit den drei Componenten  
separat arbeiten, ~~das~~ oder auch wieder die Vektoren ~~als~~ <sup>als</sup> ~~Sanses~~ <sup>Sansen</sup> betrachten.  
Das darf man allerdings auch von unserer Rechnung nicht verlangen,  
dass man Differentialgleichungen damit löst, welche man sonst nicht  
zu lösen im Stande ist, nur insofern gewährt sie auch hier einen  
Vorteil als die Diff. Gleichungen meist in einfacher übersichtlicher  
Form erscheinen und sehr leicht übersehen etc. gestattet, welche die  
Lösung erleichtern.



Was nun die Methode eines Calculs anbelangt könnte man zwei (oder <sup>7</sup>  
in neuester Zeit <sup>verschieden</sup> drei) Schulen unterscheiden, die Grassmann'sche und die <sup>5</sup>  
Hamilton'sche. Es ist sehr merkwürdig, dass zu derselben Zeit ganz  
unabhängig von einander zwei Männer, Grassmann in Göttingen und  
Hamilton in Dublin auf ganz ähnliche Gedanken gerathen.

Bernhard Grassmann veröffentlichte 1844 seine „lineare Ausdehnungslehre“  
in ~~der~~ welcher er die Grundzüge seiner Lehre veröffentlichte, in dem er in  
Allgemeinem die geometrische Seite des Gegenstandes hervorhob und  
auch auf die Nützlichkeit dieser Methode für die Physik hinwies.

Aber das Buch fand keinen Anklang; es ist in ganz merkwürdiger  
philosophisch-metaphysischer ~~Art~~ Weise geschrieben und das schreckte wohl  
die meisten von einem Studium ab. 1862 erschien eine neue aber  
ganz ungearbeitete Auflage der Ausdehnungslehre. Darnach verrieth  
Grassmann vollständig auf die geometrische Interpretation seiner Resultate,  
er behandelte die ganze Sache vom Standpunkte der Algebra.

Dass dies möglich ist, leuchtet ein, wenn man daran denkt, wie man  
die complexen Zahlen in der Ebene ~~abbildet~~ sich veranschaulichen  
kann  $p = x + iy$ . man könnte die ganze analytische Geometrie  
der Ebene zurückführen auf die Arithmetik complexer Zahlen,  
welche aus einem reellen mit einem imaginären Bestandteil besteht.  
Denkt man sich noch eine dritte <sup>von</sup> ~~Sache~~ <sup>Art</sup> anbringt darauf so könnte man



8  
auf ihr noch hyperimaginäre GröÙen auftragen und so die ~~Stück~~ Linien im  
Raum ~~als~~ als complexe GröÙen auffassen, welche aus drei Einheiten  
bestehen, einer reellen, einer imaginären und einer hyperimaginären, oder da  
da es nicht darauf ankommt was man als reell etc. bezeichnet; welche  
aus drei Einheiten verschiedener Art bestehen, und so könnte man  
die räumliche Geometrie auf Arithmetik von dreidimensionalen  
complexen Zahlen zurückführen, was ja auch theilweis von Hamilton  
geschieht. Grossman geht aber noch weiter, er ~~setzt~~ untersucht  
allgemein die Algebra von complexen GröÙen, welche aus ~~ndimensionalen~~  
<sup>von verschiedenen Dimensionen</sup> Einheiten bestehen, stellt also die Sentenz für ndimensionale  
Schilde auf. ~~Diese Schilde untersuchen~~ Damit ist er ~~nicht~~ mit der  
abstractesten Theile der Mathematik, der Mannigfaltigkeitslehre  
<sup>einmüÙig</sup> ~~gewidmet~~, welche wieder in Zusammenhang andernmüÙig mit der nicht-  
eindeutischen Geometrie in Zusammenhang gekommen. Wenn wir nun  
die Körper vierdimensionale oder mehrdimensionale Schilde wären,  
dann sind es solche, wo man einem des Portmomaie aus der Tasche  
nehmen könnte, ohne in die Tasche hineinzugreifen, so würde dies für  
uns von größter Wichtigkeit sein. Nach dem aber unser Raum  
gleichfalls nur dreidimensional ist, so werden wir Physiker uns  
mit solchen Speculationen, so interessant und erbaulich sie auch für  
den Mathematiker sein mögen, nicht beschäftigen, ~~Wohl~~ und uns mit dem  
Spezialfall der drei Dimension begnügen. So ~~ist~~ <sup>bleibt</sup> in Deutschland



diese neue Disziplin, eben wegen ihres abstrakten Scharfes von den  
Physiker <sup>und Geometern</sup> ~~und Geometern~~ fast unbeachtet und nur von den <sup>reinen</sup> Mathematikern  
wie Hankel, Clebsch, Weierstrass, Biano etc wurde sie, — aber von der  
algebraischen Seite aus — einigermaßen kultiviert; obwohl Grassmann  
selbst in einzelnen Disziplinen gesagt hatte, dass sich diese Methode  
auch sehr gut für die Physik eignen würde.

Etwas anderes war der Lauf der Dinge in England. Dort hatte  
Sir William Rowan Hamilton, Professor in Dublin <sup>nach von Grassmann's Einfluss</sup> seinen neuen Calcul  
erfunden, nach ~~dem~~ ~~Grassmann~~ welchen er ~~seiner~~ ~~neuen~~ vorzugsweise  
auf geometrischen Grundlage gründete und für die geometrische  
Forschung benutzte. Die Grundlage derselben stimmte mit Grassmann's  
Methode überein und liess sich in dessen allgemeines System subsumieren,  
aber die weitere Ausföhrung ist ganz verschieden. Vor allem erkannte  
Hamilton, dass der grösste Nutzen dieser Rechnungsart in den  
Anwendungen auf Geometrie und Physik liegt und er brachte die  
Theorie sowohl wie die geometrischen Anwendungen sofort zu solcher  
Ausföhrung, dass wir auch heute darin nicht wesentlich weiter  
gekommen sind wie er. Seine <sup>dieseshalb</sup> Forschungen legte er in zwei  
dickesigen Werken nieder: Lectures on Quaternions 1853 und  
Elements of Quaternions 1866 erst nach seinem Tode herausgegeben, aber  
von ihm schon fast vollendet, auch überliefert von ihm 1862.



10)  
Nach Hamilton's Tode ward Professor Tait in Edinburgh der  
Quaternionen ~~erste~~ großmeister und ihm sind hauptsächlich einige  
physikalische Annahmen zu verdanken, wie die <sup>Ausbildung</sup> Vermittlung des Quatern  
etc.; seine zahlreichen Untersuchungen sind größtenteils in den  
Proceedings R S Edinburgh ~~veröffentlicht~~, anderwärts schrieb er  
ein Lehrbuch unter dem Titel: <sup>in Elementary treatise on Q.</sup> Elemente der Quaternionen, übersetzt  
von Schaeff (Tübingen). ~~Es ist anzunehmen, dass~~

Was der von Grassman <sup>Ausdruck</sup> gesagt wurde gilt auch theilweise von Hamilton  
Quaternionen. Die ~~Verbreitung~~ <sup>sehr</sup> erfolgte nicht die Anerkennung  
bei den Physikern die man hätte erwarten können, ~~und~~ obwohl H.  
Maxwell selbst wiederholt auf ihre Nützlichkeit hinwies und sogar  
einzelne Begriffe in seinem bekannten Lehrbuch der Electricität  
~~offen~~ verwandte. Die Schuld lag wieder einzig und allein an der  
Darstellungsweise. Hamiltons Principienwerke sind ungemein unprä-  
zise und auch ziemlich kostspielig und Tait's Lehrbuch wieder  
ist ungemein schwer verständlich, so dass man sich nicht wundern  
konnte, dass die Physiker einen kolossalen Reizet vor dem Quatern  
hatten und dieselben als ~~etwas~~ ganz unheimlich schwer verständliches  
geheimnisvolles an den während sie grade ihre allseitige Räte eine  
Erleichterung der mathematischen Arbeit zu finden gehofft hatten.

Es ist w. ein Buch erschienen unter dem Titel: Utility of Quaternions in Phys-



von M<sup>r</sup>. Anlay (bei Macmillan). Wenn aber jemand der von Quaternionen<sup>11</sup>  
nichts versteht sich daran machen würde, um sich von der Nützlichkeit  
der Quaternionen zu überzeugen, so wird er arg enttäuscht werden, denn er wird  
absolut nichts verstehen. Das Buch setzt eben eine gründliche Kenntnis des  
Calculus voraus und ist dann allerdings von großem Vortheil, es zeigt  
wie ungemein einfach sich Hydrodynamik, Elektrodynamik u.s.w. in Quaternionenform  
behandeln lassen.

Es war das Verdienst von Heaviside, dass er die so schwer verständliche Quaternionen-  
Methode etwas modificirte, in dem er zeigte, dass man das complixirte  
Begriffes der Quaternionen gar nicht bedürfe, um die meisten Resultate  
der Lehre abzuleiten, und dass es viel praktischer ist, die ganze Disciplin  
auf dem Begriff der Vektoren, des Vektor- und Scalar-Produkts zu basiren, mit erst  
hinterdrein, wenn man es braucht, den Begriff der Quaternionen zu entwickeln.  
Zugleich hat er die ungemein große Fruchtbarkeit dieser Methode <sup>(welche er Vektor-Algebra nennt)</sup> recht  
überzeugend dargelegt, indem er die Maxwell'sche Elektrodynamische Theorie ~~der~~ auf  
diese Weise behandelte. ~~Sein~~ ~~Buch~~ führt den Titel: ~~Die~~ Electromagnetic  
Theory; es ist nicht systematisch geschrieben, sondern eigentlich eine  
Zusammenfassung einer Serie von Abhandlungen, welche er in der bekannten  
Zeitschrift "Electrician" veröffentlichte.

In Deutschland wurde diese Methode hauptsächlich <sup>durch</sup> das vortreffliche  
Buch von Föppl ~~über~~ "Die Maxwell'sche Theorie der Elektrizität" bekannt,  
welchem noch eine "Geometrie der Wirbelfelder" als Ergänzung nachgefolgt ist.



12 In dem ersten Buche wird der eigentliche Inhalt der Maxwell'schen Theorie  
eine Einleitung vorausgeschickt, worin die Grundzüge der Heaviside'schen  
Methode auseinandergesetzt werden. Die Darstellung ist natürlich nur sehr  
kurz und eingegrenzt einseitig, aber das Buch ist sonst so gut mit  
Beispielen geschildert, dass ich es Ihnen <sup>als Einleitung</sup> in Anwendung eines besseren Buches  
empfehlen kann. Es ist gewiss das Verdienst von Pöppel, dass endlich  
die Vector Rechnung auch unter den deutschen Physikern einen größeren  
Anfang findet. Man begegnet in ~~der~~ modernen theoretischen Abhandlungen  
immer öfter den Ausdrücken vector, scalar, curl, divergence, tensor etc.  
man begegnet endlich auch ~~in~~ in Deutschland einzusehen, von welcher Vortheile  
dieser Rechenart für den Physiker ist und es lässt sich erwarten, dass  
in kurzer Zeit ein großer Theil der <sup>Rechnungen</sup> ~~Abhandlungen~~ welche jetzt noch  
~~in~~ mit Hilfe von Cartesianen Coordinaten <sup>beurtheilt</sup> ~~dargestellt~~ werden, mit  
in Vector Form dargestellt werden.

Ich würde mich ebenfalls im Sanson mehr an Heaviside's Methode halten  
als an die Hamilton'sche, dabei aber auch die Resultate Hamilton's  
übernehmen, später auch den Begriff der Quaternionen einführen und  
will trachten auf diese Weise die Vortheile beider Methoden zu vereinigen.







sie auch in der Vektoren Rechnung ~~gleiches~~ nach den gewöhnlichen Regeln der Algebra behandelt werden, gerade wie es sonst zu geschehen pflegt, erfordert die Rechnung mit Vektoren eine Erweiterung und theilweise <sup>Haupt</sup> Aenderung der sonst üblichen Methoden, welche den Gegenstand ~~der~~ unserer Betrachtungen bilden wird.

### Gleichheit von Vektoren

Zwei Vektoren werden gleich genannt, wenn sowohl ihre GröÙe als auch ihre <sup>Richtung</sup> ~~Seite~~ gleich ist, also wenn sie sich durch eine Parallelverschiebung zur Deckung bringen lassen <sup>und gleich sein können</sup>, ~~daß~~ <sup>es</sup> kommt es auf die Lage des Anfangspunktes gar nicht an. Es ist dies eine willkürliche Definition des Gleichheitsbegriffs, ~~selbst~~ <sup>es</sup> oder besser gesagt: eine Ausdehnung seiner Bedeutung auf gerichtete GröÙen, während man in der Algebra <sup>es</sup> sonst bloß ~~nur~~ <sup>auf</sup> ungerichtete GröÙen ~~zu~~ anzuwenden pflegt; dass sie nützlich ist wird sich im weiteren Verlaufe zeigen. Es ist wohl zu beachten dass die Gleichheit der absoluten Längen zweier Vektoren nicht hinreicht ist, um die Vektoren selbst einander gleich zu setzen. Hierin ist ~~noch~~ <sup>es</sup> noch Gleichheit der zwei Richtungscoordinaten erforderlich, so dass <sup>das Resultat</sup> einer Vektoren - Gleichung <sup>die ersten</sup> ~~nicht~~ drei gewöhnlichen Gleichungen voraussetzt, und umgekehrt <sup>kann man</sup> ~~auch in denselben aufgelöst werden kann.~~ aus der Existenz einer Vektor Gleichung auf die Existenz dreier Scalar Gleichungen schließen, da diese damit gleichbedeutend sind.

Analogie: Congruenz Ähnlichkeit von Dreiecken etc.



15

Berechnung  
~~Aneinanderfügen~~ von Vectorgrößen

Vektoren kann man entweder nach ihrem Anfangs und Endpunkt bezeichnen z.B.  $AB$ , was aber nur bei der einfachsten Art von Vektor d. i. Strecken thunlich ist. ~~Praktischer~~ Praktischer ist es im Allgemeinen hierfür einfache Druckstaben zu gebrauchen, wie es mit sonstigen physikalischen etc. GröÙen zu geschehen pflegt. Hamilton und nach ihm auch Tait so wie überhaupt die meisten Quaternioniker gebrauchten hierfür <sup>kleine</sup> griechische Druckstaben, während Maxwell und Pöpgel gotische Frakturbuchstaben einführen. Am zweckmäßigsten scheint es mir doch, mit Heaviside bei den Latentruckstaben zu bleiben, welche man dadurch noch in Druckschrift von Fetten gröÙen hervorheben kann, dass man sie verdickt, während man in Schreibschrift wo eine Hervorhebung des Vector Charakters besonders nöthig erscheint, einen Strich darunter anbringen kann. Uebrigens werden wir hier nur die Druckstaben  $a$  bis  $n$  und  $r$  verwenden. Die übrigen, sowie die groÙen Druckstaben und sämtliche griechischen ~~Wörter~~ verbleiben für die Fetten.

Aneinanderfügen von VectorgröÙen

Wird an den Vector  $a = AD$  in dessen Endpunkte  $B$  ein zweiter Vector  $b = DC$  angefügt so berechnet man die Verbindungslinie  $AC$ , <sup>d. i.</sup> ~~man~~ den Vector  $c$  mit dem Zeichen  $a+b$ .



16/  
 Dieses Aneinanderfügen von Vektoren, welches man geometrische Addition zu nennen pflegt, involviert also eine Erweiterung des Begriffs ~~stetig~~ des  $+$  Zeichens, welche jedoch mit der sonst üblichen Praxis nicht in Widerspruch steht, denn <sup>in</sup> dem einzigen Falle, welchem auch sonst Richtungsgrößen vorkommen pflegen, d. i. bei Addition gleichgerichteter Strecken ~~sind offenbar~~ fällt der Begriff der geometrischen Addition mit der algebraischen Addition zusammen: es wird daraus Summation der Längen mit Beibehalt der Richtung.

Denn Begriff auch sonst schon mitunter angewendet: <sup>In der Ebene:</sup> komplexen Größen

$$\rho = x + iy = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad \text{bedeutet Strecke der } x \text{ Long. } x \text{ - etc.}$$

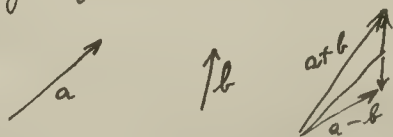
$$\rho' = x' + iy'$$

$$\rho + \rho' = (x+x') + i(y+y') \quad \text{d. i. Strecke der } x \text{ Long. } x+x' \\ y \text{ -- } y+y'$$

Historisches: Robins<sup>2</sup>, Delavitis, Moivre

Gernach ist auch schon klar, was man unter Subtraction von Vektoren verstehen wird. Unter einem negativen Vektor versteht man den Vektor in umgekehrter Richtung durchlaufend - also unter Subtraction wird man die Addition des umgekehrten Vektors verstehen.

In der Zeichnung genügt nicht der Ohnbestabe, dabei muss ein Pfeil den Sinn angeben

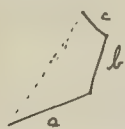




Es ist klar was man unter einer Summe <sup>aus den Vektoren</sup> ~~aus den Vektoren~~ versteht  
 $a + (b + c)$  versteht wird

17

10



Ferner ergibt die bloße Anschauung, dass es gleichgültig ist ob wir  $(a+b)+c$  bilden oder  $a+(b+c)$

man kann somit die Klammern überhaupt vergessen  $= a+b+c$   
 (Assoziatives Gesetz), welches ebenso für Summen von mehr Vektoren gilt:

Ebenso ist klar, dass  $a+b = b+a$  = Gesetz des Parallelogramms

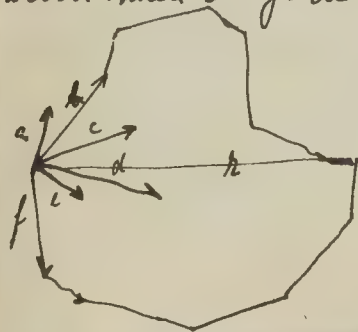


was gleichfalls ohne weiteres sich auf Summen mehrerer Vektoren übertragen lässt. Es sind

also die Summanden vertauschbar (Commutatives Gesetz),

folglich sind ~~damit man~~ ~~dieselbe Operation~~ mit dem Zeichen  $+$ , ~~also~~ hier ebenso umgehen wie sonst in der Algebra, und dasselbe gilt auch für die Subtraction.

Der <sup>zwei</sup> Vektoren ist die Vertauschbarkeit der Reihenfolge der Summanden unmittelbar einzusehen, schwieriger ist es schon, wenn man ein ganzes Büschel von Vektoren hat, besonders aber



wenn diese nicht in einer Ebene liegen sondern im Raume vertheilt sind. Auch dann ist  $r = a+b+\dots+f$  unabhängig von der Reihenfolge, wie wir diese Vektoren ~~zusammen~~ aneinanderfügen.

189

Ein sehr passendes Objekt zur ~~Übung~~<sup>solchen Zusammenfassung und Überlegung</sup> Veranschaulichung (von Vektoren) im Raume bilden z.B. die Kristallfiguren. Es wäre eine sehr gute Übung sich da concrete Aufgaben zu stellen z.B. Aufwieviel verschiedene Arten kann ich <sup>die Diagonale</sup> (von einer Spitze eines Octaeders zur gegenüberliegenden Spitze als Summe von 3 Vektoren (Kanten) ausdrücken. Beim Tetraeder, Octaeder, Hexaeder werden solche Aufgaben noch leicht im Kopfe zu machen sein, aber Schwierigkeiten wird dies bei den complicirten Körpern wie Rhomben dodekaeder etc. bereiten. Unsere Fähigkeit geometrischer Raum Anschauung ~~ist~~ wird aber in den Schulen viel zu wenig geübt (darstellende Geometrie ist noch das beste Mittel dafür, um richtig zu betreiben), da die analytische Geometrie davon ganz abstrahiert, und es ist ein besonderer Nutzen der Vektoren Rechnung dass sie immer wieder ein <sup>räumlicher</sup> directer Veranschaulichung abhelfen.

Wird die Summe von irgendwelchen Vektoren  $a+b+c=0$  so heißt das soviel als dass sie ein geschlossenes Polygon bilden, natürlich im allgemeinen kein ebenes sondern räumliches.

~~Die~~ <sup>haben wir</sup> ~~Bisher~~ immer (räumliche Strecken als Vektoren) betrachtet, es ist aber klar dass ~~hier~~ ~~hier~~ diese Additions- und Subtraktionsregeln ganz ebenso für andere ~~z.B.~~ z.B. physikalische Vektoren gelten, da man sie ja immer noch durch eine Strecke der Länge und Richtung nach



geometrisch dargestellt denken kann.

19

Sind die Vektoren  $n$  Kräfte so folgt aus dem eben Gesagten direkt das Kräfteparallelogramm: die Resultierende Kraft  $f$  verschiedene Komponenten  $a, b, c$  ist gleich der geometrischen Summe derselben.  $f = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

[Ist dies selbstverständlich oder nicht?  $\cos \alpha = \frac{a}{r} / \cos \beta = \frac{b}{r} / \cos \gamma = \frac{c}{r}$ , <

Eigentlich  $\vec{f} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$  (als Vektor)  $\vec{f}^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 2\vec{a} \cdot \vec{c} + 2\vec{b} \cdot \vec{c}$ ]

Überrascht für Drehungsmomente, dies ist schon vorherigen voranstellten Ex.

Ein spezieller Fall der Addition: wenn alle ~~Vektoren~~ Summanden gleich sind.  $\underbrace{a + a + a + \dots + a}_x = ax = xa$  Also Produkte von Vektoren mit Skalar-Zahlengrößen werden in der gewöhnlichen Weise gebildet; ein ~~X-faches~~ eines Vektors = Vektor derselben Richtung aber von  $x$ -fachen Länge. Es scheint dies ganz selbstverständlich, muss aber doch hervorgehoben werden, weil <sup>in die Länge werden</sup> die Sache nicht mehr so einfach ist, sobald anstatt  $x$  ein anderer Vektor kommt. Allgemein  $b = ax$  bedeutet, dass  $a$  und  $b$  parallel sind, und dass die Länge von  $b$   $x$ -mal so groß ist als die von  $a$ . Häufig ist es von Nutzen, ~~einen~~ Vektoren als ~~ein~~ derartige Vielfache eines sogenannten Einheitsvektors in Betracht, d. i. eines Vektors von gleicher Richtung, dessen Länge ~~ein~~ gleich der Längeneinheit (oder überhaupt der  $a$ ) ~~ist~~ ist. Bezeichnen wir  $e$  den in der Richtung von  $a$  aufgesetzten Einheitsvektor mit  $A$  so kann man setzen  $a = A a$ . <sup>scalar) = absolute Wert</sup> so ist dann  $a$  eine bloße Zahl; sie wird auch Tensor des Vektors  $a$  genannt ~~und~~ kann auch durch ein vorangestelltes  $Ta = a$  bezeichnet werden.

Andererseits wird der Einheitsvektor  $\hat{A}$  auch Vektor  $a$  genannt und mit  $U_a$  bezeichnet, diese Ausdrücke werden wie ich erst bei der Erörterung der  
 Quaternionen ~~ausdrücken~~ häufiger <sup>benutzt</sup> sein werden.

~~Da das häufiger vorkommt, pflegt man ein System von 3 Einheitsvektoren  $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$  zu wählen, welche man  $i, j, k$  nennt.~~

~~Einheitsvektoren für <sup>die</sup> Richtung  $i, j, k$  zu wählen, welche man  $i, j, k$  nennt.~~  
 Denken wir uns nun  $d$  <sup>den</sup> Vektor in  $R^3$ , kann man ~~ihn~~ <sup>man</sup> ~~in seine~~ <sup>in</sup> Komponenten nach ~~3 beliebigen~~ <sup>den Richtungen von 3 Einheitsvektoren</sup>  $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$  zerlegen, welche mit  $i, j, k$  einer Ebene  $xy$  sollen, wie nun, tritt hier das Problem auf, wie wir durch seine Endpunkte  $\parallel$  zu derselben ziehen etc., heißen diese Komponenten  $a, b, c$

so haben wir dann  $a = xA$ ,  $b = yB$ ,  $c = zC$   
 andererseits ist  $d = a + b + c$ , somit kann  $d = Ax + By + Cz$  geschrieben werden.

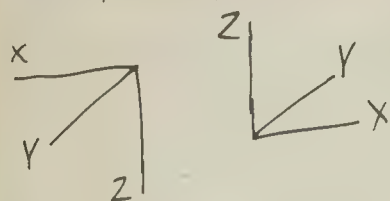
Am bequemsten ist diese Zerlegung meist, wenn man die  $A, B, C$  ~~rot~~  
 senkrecht zueinander und alle von gleicher Länge  $= 1$  macht; ~~Man~~ <sup>Man</sup> man  
 pflegt sie dann mit  $i, j, k$  zu bezeichnen, ~~und die~~ <sup>die</sup> ~~Werte~~ <sup>Werte</sup>  
 der Komponenten werden wir mit  $d_1, d_2, d_3$  bezeichnen so dass  $d = d_1 i + d_2 j + d_3 k$

Diese Zerlegung ~~abspaltet~~ <sup>abspaltet</sup> für den Fall zweier Koordinaten <sup>identisch mit</sup> ~~ganz~~ <sup>entgegen</sup> der öfters  
 erwähnten Darstellung komplexer Größen in der Ebene; sie ist analog der  
 sonst üblichen Cartesischen Darstellung <sup>durch Komponenten</sup>;  $d_1, d_2, d_3$  sind einfach die  
 $x$  &  $z$  Koordinaten, <sup>resp.  $y$  &  $z$  Komponenten</sup> nur darf man dort die Summenformel nicht  
 schreiben, da dort nur gleichartige Größen addiert werden.  $d_0 = \sqrt{d_1^2 + d_2^2 + d_3^2}$

Es ist nun von Wichtigkeit zu bestimmen wie wir die  $i, j, k$  angeordnet  
 denken

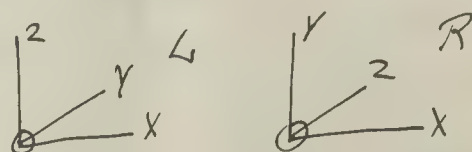


~~Man~~ Man kann die ~~MTX~~ nach rechts oder links, nach oben oder unten <sup>21</sup> zeichnen, darauf kommt es nicht an, es ist dies kein wesentlicher Unterschied



denn das ~~bestimmt~~ hängt ~~ab~~ davon <sup>12</sup>  
 ob von welcher Seite wir die Sache  
 anschauen, aber ~~er~~ <sup>es</sup> ist ein wesentlicher

Unterschied zwischen verschiedenen Koordinatensystemen liegt in der  
 Reihenfolge der Achsen ~~ist~~



Man kann das ~~er~~ <sup>er</sup> zweierlei

Ansysteme unterscheiden <sup>die</sup> die durch keinerlei Drehung zur Deckung  
 zu bringen sind, sie verhalten sich so wie <sup>ein</sup> rechter Handschuh zum  
 linken: eines ist das Spiegelbild des andern; das einzige Mittel um  
 die Handschuhe congruent zu machen ist: ~~das~~ <sup>das</sup> ~~man~~ <sup>man</sup> ~~den~~ <sup>den</sup> ~~einen~~ <sup>einen</sup> ~~umzulegen~~ <sup>umzulegen</sup>,  
 ebenso werden diese Systeme congruent, wenn man eine der Achsen in

die entgegengesetzte (Prims-) Richtung aufträgt (oder alle drei).  
 Das System R pflegt man ein rechtshändiges zu nennen, da man von dem  
 Aufangspunkt in der X-Richtung fortgehend eine Rechtsdrehung beschreiben  
 muss, um die Y-Achse in die Z-Achse zu bringen, es ist hauptsächlich in

(Thom, Tait, Tait, Russell, Hamilton)  
 England in Gebrauch; das linksländige System L liegt in Frankreich.

Nun ist aber erst der Begriff der Rechtsdrehung klar zu machen, es ist  
 das dieselbe Drehung welche man beim Eindrehen eines Korkstoppers vollführt  
 oder beim Fichten wenn man ein Quart schlägt (aus Tiers). Linksdrehung:  
 Korkstoppers herausdrehen, Secorde schlagen aus Tiers. Korkstoppers wie

überhaupt ~~die~~ <sup>meist</sup> meisten Systeme sind rechtshändig. [Diese Ränke von Wein,

Hoffen sind linksgedreht. Rechts, Links gewundene Schnecken. (22. 10. 1875)

Rechts, Links drehung der Polarisationsebene des Lichts, asymmetrische Cirkuläre

Tetraeder. Von besonderer Wichtigkeit ist für Regnetismus, rechts

gewundene Spule hat der N. Pol durch so stark ansteigt? ist

Würde man die Revers. Gleichung ~~ist~~ nach dem ein System aufstellt

und dann auf ein anderes übertragen so müsste man  $\pm$  vertauschen

Würden wir bloß ~~an~~ Geometrie betreiben so würde diese Unterscheidung

von keiner besonderen Wichtigkeit sein, denn die beiden Systeme sind vollkommen

gleichberechtigt und ~~es~~ ob man jetzt eine rechtsgewundene Spirale oder

eine linksgewundene als positiv erachtet, wäre da ganz gleichgültig.

Man könnte auch einem Menschen der nicht schon weiß, was rechts & links

Hand ist, dies durch <sup>mit</sup> einer geometrischen Exploration klar machen, man

~~würde~~ <sup>könnte</sup> ~~ihm~~ <sup>eine</sup> nur auf andere schon bekannte, conventionell

festgesetzte Nomenclatur von <sup>bekannte</sup> Naturerscheinungen verweisen. 20.

Rechts System: X Ost, Y Nord, Z ~~ist~~ aufwärts.

Sobald man ~~die~~ <sup>die</sup> Geometrie auf tatsächlich stattfindende

Naturerscheinungen anwendet, also auf Physik, wird diese

Unterscheidung von großer Wichtigkeit.

Leitet man ~~da~~ die Gleichungen für Elektrizität und Magnetismus

unter Annahme eines rechten Systems ab, so wird man zu falschen

Resultaten kommen, wenn man diese Gleichungen auf ein linkes System





28) Ebenso wie in der Physik ist auch in der belebten <sup>organischen</sup> Natur der Unterschied  
von rechts und links von Wichtigkeit.

Wirbeltiere sind <sup>rechts</sup> ~~links~~sgängig, Kriecher linkssgängig. Manche Schneckenarten  
rechts andere linkssgängig. Symmetrie bei den Tieren, Herz links,  
Leber rechts, obwohl gar kein Symmetrieplan vorliegt. Derselbe für gemeinsame  
Atmung und Verdauung, sonst wäre es ungemein unvorteilhaft, dass dies  
immer so der Fall ist.

Nach diesem Exkurs über Rechts und Links kehren wir wieder zu unserem  
eigentlichen Gegenstand zurück.

Die Zerlegung  $d = i d_1 + j d_2 + k d_3$  werden wir sehr häufig anwenden  
man könnte sie auch unmittelbar als Definition eines Vektors voraussetzen,  
dann ergeben sich die oben <sup>mittels</sup> ~~mit~~ geometrischer Anschauung bewiesenen  
Sätze über Addition und Subtraction von selbst.

$$a = i a_1 + j a_2 + k a_3$$

$$b = i b_1 + j b_2 + k b_3$$

$$c =$$

---

$$a + b + c = i(a_1 + b_1 + c_1 + \dots) + j \dots + k(\dots)$$

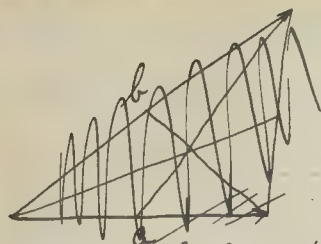
bedeutet Vektor, dessen 3 Komponenten  $(a, b, c, \dots)$  in den Klammern beliebig vertauschbar

daher auch Operationsfolge vertauschbar etc.

Mit diesen einfachen Regeln kann man doch schon eine ganze Menge von  
Aufgaben auf elegante und einfache Weise lösen vgl.

~~Beweis dass die 3 Schwerlinien eines Dreiecks sich in 1 Punkt schneiden, der~~  
 ~~$\frac{2}{3}$  von der Höhe entfernt ist.~~





Gleichung  $r = ta$  wenn  $t$  eine beliebige Skalar bedeutet  
bedeutet Gerade in der Richtung  $a$

$r = b + ta$  " " " ~~bedeutet~~ die

durch den Endpunkt von  $b$  geht.

$r = b + c + \dots + (x + y + z + \dots)a$   
denselbe

[ dagegen  $r = b + xa + x^2c$  bedeutet schon Curve, allerdings in der Ebene  
welche  $a, c$  enthält  
 $r = b + xa + x^2c + x^3d$  Curve in Raume ]

Gleichung <sup>der Geraden</sup> welche durch zwei Punkte  $b, c$  geht:

$$r = b + t(c-b) = (1-t)b + t c$$

Stellt man sich unter  $t$  die Zeit vor so bedeutet dies einfach eine  
gleichförmige Bewegung eines Punktes mit der Geschwindigkeit  $(c-b)$  in  
der Richtung  $c-b$ .

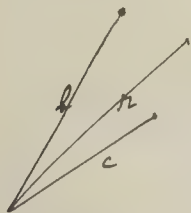
In diesem Falle liegen <sup>also die Endpunkte</sup> ~~selbstverständlich~~  $r, b$  und  $c$  immer in einer  
~~Geraden~~ <sup>Geraden</sup>; umgekehrt kann man die Existenz einer solchen Gleichung  
als Bedingung dafür auffassen, dass die 3 Vektor  $r, b, c$  ~~coplanar~~ <sup>in einer Geraden liegen</sup>

Sollen  $a, b, c$  in einer Ebene liegen, so muss sich  $r$  ausdrücken  
lassen durch  $b$  und  $c$  und umgekehrt jeder Vektor der bloß  
aus <sup>additiven</sup> Kombinationen von  $b$  und  $c$  gebildet ist liegt mit ihnen in einer  
Ebene vgl.  $b+c, b-c, 2b+c, 2b-3c$  etc.

allgemeine Form eines mit  $b$  und  $c$  coplanaren Vektors  $r$   
 $r = x b + y c$

26)

Es bedeutet sonst  $r = x b + y c$  auch allgemein eine Ebene die durch den Koordinaten Ursprung geht, und die beiden Vektoren  $b, c$  enthält, oder aber überhaupt in ihnen parallel ist, sie können ja auch von Ursprung sein.



Will man eine zu  $b, c$  parallele Ebene darstellen die durch den Punkt  $d$  geht so hat man

$$r = d + x b + y c$$

Eine Ebene welche durch die Endpunkte von  $a, b, c$  geht:

$$r = a + x(b-a) + y(c-a) = a(1-x-y) + bx + cy$$

Wählt man  $x, y$  die liegt als  $a, b, c$  so wird dies:

$$r = a(1-x-y) + bx + cy \quad 3 \text{ Parameter } x, y$$

Man braucht sich diese Formeln nicht zu merken, diese folgt aus Übung und können jeden Moment leicht abgeleitet werden.

Was wird nun eine Gleichung  $r = a\phi(x) + b\psi(x)$  bedeuten wo  $\phi$  irgend eine gegebene Funktion bedeutet?

~~Es ist~~ 1). Lineare Form in Bezug auf Vektoren Explizite Form

2). Nur eine willkürliche Veränderliche kommt vor, also Curve

3). Ist sie eben? Ja

4). Kann es eine Gerade sein? dann müsste  $\phi$  und  $\psi$  ~~linear~~ <sup>linear</sup> sein; Gerade

Wenn  $\phi + \psi = 0$  (siehe vorher)

Ebenso überhaupt  $r = \sum a \phi(x) + b \psi(x) + c \chi(x) + \dots$

Curve in der Ebene, wenn 2 Vektoren mit veränderlichen GröÙen multipliziert, sonst Curve im Raum.



Die ab... kann man jedes eulgen auf  $i, j, k$   $\mathcal{O}$ .

27

$$\begin{aligned} r = & i [a, \varphi(x) + b, \varphi(x) + c, \chi(x) + \dots] \\ & + j [a, \varphi(x) + b, \varphi(x) + \dots] \\ & + k [a, \varphi(x) + \dots] = \text{in Allgemein.} = i \Phi(x) + j \Psi(x) + k \chi(x) \end{aligned}$$

Was bedeutet  $r = a \varphi(x) + b \varphi(x) + c \chi(y) = \Phi(x, y)$

Das ist jetzt eine Fläche, weil 2 willkürliche Veränderliche,  $x, y$  sind.

Wenn wir  $r = a \varphi(x) + c \chi(y) + d \varphi(z)$  setzen so wird dadurch schon die ganze Raum erfüllt, wenn noch mehr unabhängige Variabel so ist das <sup>in Allgen.</sup> keine anschauliche Vorstellung mehr möglich.

Beispiele  $r = x i + y j + k \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$  = Kugel um 0 als Mittelpunkt

$r = m x i + n y j + k \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$  = Ellipsoid

$\mathcal{O}$ . Schnitt mit Ebene  ~~$x = a + t z$   $y = b + t z$~~

$r = \frac{A}{m} i (1 - t - z) + \frac{B}{n} j t + \frac{C}{k} z$

$m x = 1 - t - z$

$n y = B t$

$\sqrt{R^2 - x^2 - y^2} = C z$

deraus kann  $x, y, t$  als function 2 darg. ~~st~~ werden  
also 1 Variable = ~~Curve~~ Schnitt curve

~~Beispiel von ...~~ Auch in anderen Form können  $\mathcal{O}$  Flächen dargestellt werden  $\mathcal{O}$ .  $r = p a + q b + c c$

Wenn aus der <sup>in</sup> Ordnung  $A p^2 + B q^2 + C c^2 = 1$  dies wird eine Centralfläche zweiten Ordnung vorstellen.

Beispiele von Curven:

Ebenen Curven:  $z = a + bx + cx^2$

~~$z = (a + bx + cx^2)e^{it} + \dots$~~

$z - a = bx + cx^2$  Parabel

$z = a \sin pt + b \cos pt = \text{Ellipse}$

$= ax + b\sqrt{1-x^2}$

~~$z = (i \cos pt + j \sin pt) A$~~   $z = (i \cos pt + j \sin pt) A = \text{Kreis}$

$z = A(i \cos x + j \sin x) + kx$  rechtschraubenlinie  
 $- kx$  linke "

---



Vorges. Red. haben einige geometrische Örter beendigt, aber nicht zu Ende gebracht.

Also:

I. Eine willkürliche Veränderliche  $x$

$$r = \varphi(x) a + \psi(x) b + \chi(x) c + \dots \quad \left. \begin{array}{l} \text{Rann Curve} \\ \text{mit veränderl. Größe multipl. also} \end{array} \right\} = \Phi(x)$$

Wenn man nur 2 Vektoren ~~vorhanden~~ oder wenn sie überhaupt in die Form  $r = a + b\varphi(x) + c\psi(x)$  gebracht werden kann. Gerade wenn nur 1 Vektor vorh. lässt sich das immer auf 3 Vektoren zurückbringen.

II. Zwei willk. Veränd.  $x, y$   $= \Phi(x, y)$

$$r = \varphi(x, y) a + \psi(x, y) b + \chi(x, y) c + \dots \quad \left. \begin{array}{l} \text{Fläche} \\ \text{Letztes Red. von spec. Fall} \end{array} \right\}$$

betrachtet, nämlich wo einzelne  $y$  -- als Funktion  $x, y$  von  $x$  -- lässt sich immer auf die dreifache Form bringen. Wenn man 2 Vektoren mit veränderlichen Größen multipliziert, so Ebene, und zwar parallel diesen Vektoren.

~~Beispiel~~

III 3 unabh. Ver.  $x, y, z$

$$r = \varphi(x, y, z) a + \psi(x, y, z) b + \dots \quad \left. \begin{array}{l} \text{Flächensystem, welches} \\ \text{keine einfache geometrische} \end{array} \right\}$$

Voraussetzung, erfüllt ~~ein~~ <sup>einen</sup> ganzen Raumtheil; ~~man~~ kann auch als Gleichung von Flächensystemen aufgefasst werden.

IV. Mehr unabh. Ver. gar keine geometrische Voraussetzung.

$\frac{2}{3}$  Dagegen kann dies doch eine Ebene vorstellen, wenn zwischen den  $x, y, z$  noch Bedingungengleichungen  $f(x, y, z) = 0$  etc. stattfinden, dann sind sie dann nicht unabhängig variabel.

Dies führt zu einer anderen Form von Gleichungen:

$$\rho = ax + by + cz \quad \text{mit Bedingung} \quad F(x, y, z) = 0$$

Fläche; wenn  $a=i, b=j, c=k$  so ist dies einfach die Darstellung der analytischen Geometrie

$$\rho = ax + by + cz \quad \left. \begin{array}{l} F(x, y, z) = 0 \\ \Phi(x, y, z) = 0 \end{array} \right\} \text{Raum Curve}$$

Man kann die eine Form in die andere umwandeln (wie später)

Erster Form: explizite Vektorgleichung } der Fläche, Curve etc.  
Zweiter Form: implizite Gleichung

Dies sind aber noch lange nicht alle möglichen Formen, gewöhnlich werden wir sogar mit anderen Formen, nämlich impliziten Vektorgleichungen operieren, welche wir erst später kennen lernen werden

Beispiele:

$$I). 4) \quad z = A(i \cos x + j \sin x) + B k x \quad \left. \begin{array}{l} \text{rechte} \\ - B k x \quad \text{linke} \end{array} \right\} \text{Scherenlinie}$$

[Dass  $u, v$  als Variable in Vektorgleichung mit Cart. Coord. zu verstehen]

$A$  = Radius des Scherenzylinders (Abstand von Axe)

$2\pi B$  = Ganghöhe

Hier ist  $k$  die Axe; wollte ich 20.  $i$  als Axe haben: entsprechend

Vertauschung

$$1). \quad z = A(i \cos x + j \sin x) \quad \text{Kreis in } ij \text{ Ebene}$$

alternativ:  ~~$z = A$~~  oder auch  $z = A(i t + j \sqrt{1-t^2})$

Allgemein  $z = a \cos x + b \sin x$  wenn  $a, b$  ~~Skalarwerte~~ und gleich



2).  $z = A i \cos x + B j \sin x = \text{Ellipse in } ij \text{ Ebene}$   
 $A, B \text{ Axen}$

[besser  $u, v$  als Variablen]

17

3).  $z = \alpha x + \beta x^2$  Parabel  
 $\beta = \text{Aussparung}$

II). 1).  $\rho = A(i \cos x + j \sin x) + k y$  Kreiszylinder mit  $k$  als Axe

2).  $\rho = x [A k + i \cos y + j \sin y]$  Kreis Kegel mit  $k$  als Axe

3).  $\rho = A[i x + j y + k \sqrt{1-x^2-y^2}]$  Kugel mit  $A$  als Radius

Sämtliche diese Gleichungen lassen sich ohne weiteres in die Sclerform umwandeln, welche sonst in der analytischen Geometrie gebräuchlich ist, indem man  $\rho = i x + j y + k z$  setzt und die  $u, v$  eliminiert vB.

$$i x + j y + k z = A[i u + j v + k \sqrt{1-u^2-v^2}]$$

$$x = A u$$

$$y = A v$$

$$z = A \sqrt{1-u^2-v^2}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = A^2 \quad \text{Cartesische Kugelfgleichung}$$

$$i x + j y + k z = A(i \cos u + j \sin u) + B k u$$

$$x = A \cos u$$

$$y = A \sin u$$

$$z = B u$$

Daraus 2 Gleichungen:  $x^2 + y^2 = A^2$   
 $x = A \cos \frac{z}{B}$

} Cartesische  
 } Koordinatengleichung

In letzterem Falle ist es übrigens schon bei unseren jetzigen Kombinationen leicht eine implizite Gleichung für die Kugel anzugeben welche viel einfacher ist, nämlich:  
 $r_0 = A \quad \text{oder} \quad T r = A$   
 dies ergibt das Wesen der impl. Gleichg. dass  $u, v$  nicht direkt vorkommen

### III. 10.

Gleichung für den Kugelraum

$$r = \sqrt{A^2 + x^2 + y^2 + z^2}$$

beschränkt auf reelle Werte:  $u, v, w$ !

$r = A(iu + jv + k\sqrt{1-u^2-v^2-w^2})$  stellt den ganzen Raum innerhalb der Kugel  $A$  vor, (jedem Wert von  $w$  entspricht eine Kugelfläche)

Das waren bisher rein geometrische Betrachtungen, solange  $r$  eine Strecke, verstanden haben und die willkürlichen Variabel  $u, v, w$  nicht näher definiert haben.

In der Physik wird dies natürlich anders sein, dort werden die Vektoren oder die Scalar Variabel in Allgemein bestimmte physikalischen Bedeutung haben.

10. Kinematik (und in weiterer Folge auch Mechanik) entsteht dadurch, dass man als eine unabh. Variable  $u$  die Zeit  $t$  setzt. Vektoren bleiben Strecken. Mechanik entsteht wenn man außerdem noch Kraftvektoren einführt.

Fasst man dann 10. Gleichung einer Curve  $p = a\varphi(t) + b\psi(t) + c\chi(t)$  in Betracht, so ist klar dass dies die Bewegung eines Punktes in dieser Curve darstellt. Selbstverständlich muss auch umgekehrt jede Bewegung eines Punktes als solche Gleichung dargestellt werden können.

Besprechung der obigen Beispiele, wobei:  $p = a + bt$  geradlinig gleichförmig

Die Gleichung  $F(u, v, t) = 0$  kann in Allg. als Gleich. einer Curve } offen  
 $F(u, v, t) = 0$  - - - - - } Fläche } werden,  
 wobei sich in  $F(u, v, t)$   $t$  fortbewegt, allerdings in Allgemein auch  $t$  feststellt

bedeut.

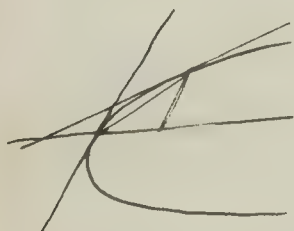




6  
 Für den Schnittpunkt der Tangente mit  $\frac{1}{2}$  muss  $\frac{1}{2}$  <sup>Faktor</sup> ~~aus~~ <sup>heraus</sup> ~~fallen~~

also:  ~~$s = -\frac{1}{2} u^2$~~   ~~$v = -u$~~

also:  ~~$s = -\frac{1}{2} u^2$~~  Somit gleich der Abzisse des Durchstoßpunktes



Für Schnittpunkt mit  $\frac{1}{2}$ :

$$v = -\frac{u}{2}$$

$$s = a \frac{u}{2} = \frac{1}{2} \text{ Punkte}$$

Für  $u=0$  wird  $ds = a$  Somit besagt dies dass  $a$  die Geschwindigkeit ist.

Leichter ~~heraus~~ <sup>erklärlich</sup> wird dies alles in der kinematisch

Form

$$r = a t + b t^2$$

$$r' - r = (t - t') [a + b(t + t')] \quad \frac{r' - r}{t - t'} = \text{mittlere Geschwindigkeit}$$

$$dr = dt (a + 2bt)$$

$$\frac{dr}{dt} = \text{Geschwindigkeit im Moment } t = a + 2bt = v \quad [\text{Hodograph!}]$$

$$\frac{dv}{dt} = 2b = \text{Beschleunigung} = \ddot{r} \text{ also constant}$$

Stellt freien Fall vor; Punkt im Moment  $t=0$  in Richtung  $a$  gerichtet

Beschleunigung in Richtung  $b$  wirkend.

Ganz allgemein  $r = \varphi(t)$   
 $\dot{r} = \dot{\varphi}(t)$   
 $\ddot{r} = \ddot{\varphi}(t)$

Mechanik eines freien Punktes  
 definiert durch  
 Kraft  $f = m \ddot{r}$



In ähnlicher Weise wird es begründet wie man Vektordifferentialie integrieren kann.

Geschlossenes Polygon ~~###~~  $\sum a = 0$

$$= \sum (r_1 - r_2) + \sum (r_2 - r_3) + \dots$$

Wenn nun unendlich viele einzelne Stücke  $ds$  beschreibt man ein ganzes wie  $ds$  somit  $\oint ds = 0$  über eine geschlossene Curve

Dabei wohl zu merken, dass dies eine geometrische (Addition) bedeutet  
 $= \int dR ds$  (Integration)

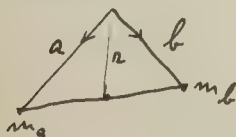
Wenn man die absoluten Beträge addiert

$$\int ds_0 = \text{Umfang} = s \quad \text{und für unendlich Stücke}$$

In ähnlicher Weise, wenn  $ds$  ein gerichteter Flächenelement bedeutet  
 so ist  $\oint ds = 0$  über ganzen Körper für unendlich Stücke:  
 $\sum s = 0$   
 dagegen  $\int ds_0 = \text{Oberfläche}$   $\sum s_0 = \text{Oberfläche}$

Auf diese Sachen später noch ausführlicher einzugehen. Hier nur kinetische Gastheorie mit Hilfe der Schwingungszahl  
 $c = \frac{\sum a}{N} = \frac{\int \rho a dv}{\int \rho dv}$   $n = \frac{\int \rho a dv}{\int \rho dv} = \frac{\int \rho a dv}{\int \rho dv}$

Noch ein mechanisches Beispiel, wo eine Volumen Integration vorkommt  
 Schwerpunkt:



$$r = a + \frac{mb}{m_a + m_b} (b - a) = \frac{(m_a + m_b)a + mb}{m_a + m_b} = \frac{am_a + bm_b}{m_a + m_b}$$

Ebenso Schwerpunktsvector für 3 Massen  $r = \frac{am_a + bm_b + cm_c}{m_a + m_b + m_c}$

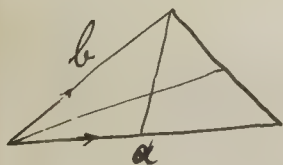
Für beliebig viele  $r = \frac{\sum m a}{\sum m}$  für unendliche  $r = \frac{\int \rho a dv}{\int \rho dv}$

Also sieht man allgemein dass man Vektoren ausdrücken auch nach skalarem Vervielfachen integrieren kann in derselben Weise wie sonst in Integralrechnung; Bedeutung ist die einer geometrischen Summe.

Alles das wird später noch ausführlicher besprochen werden. Jetzt nur als Einübung damit man mit dem Begriffen vertrauter wird.

Schon durch unsere bisherigen Kenntnisse könnte man manche geometrische Sätze sehr einfach beweisen.

D. 3 Schwerlinien <sup>des  $\Delta$</sup>  schneiden sich in einem Punkte in  $\frac{2}{3}$  des Abstands <sup>von Spitze</sup>



$$1). r = x \left[ a + \frac{1}{2}(b-a) \right] = x \frac{a+b}{2}$$

$$2). r = \left[ b + y \left( \frac{a-b}{2} \right) \right] = y \frac{a}{2} + (1-y)b$$

$$3). r = \left[ a + z \left( \frac{b}{2} - a \right) \right] = (1-z)a + \frac{1}{2}z b$$

$$1, 2) \quad y = x \quad 1-y = \frac{x}{2}$$

$$1-y = \frac{y}{2} \quad y = \frac{2}{3}$$

$$1). r = \frac{2}{3} \frac{a+b}{2} = \frac{a+b}{3}$$

$$2). r = \frac{a+b}{3}$$

$$1, 3) \quad 1-x = \frac{x}{2} \quad 2=x \quad 2=\frac{2}{3}$$

$$3). r = \frac{a+b}{3}$$

g. e. d.

So könnte man sonst auch schon recht hübsche Beweise machen aber im Allgemeinen sei die Methode noch etwas unbehilflich, hätte keinen großen Vorzug vor Cartes Geometrie, namentlich <sup>schon</sup> unverständlich, ausserdem dass Gerade aufeinander  $\perp$  stehen wie dort.

Noch Vereinfachung wird erst durch zwei neue Symbole erzielt, die wir nun besprechen wollen









~~Andere einfache Anwendungen:~~

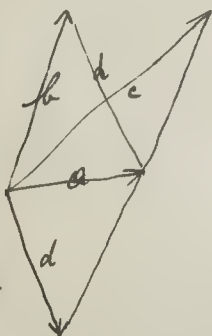
$\frac{3}{4}$  ~~11~~

$$S(a+b)(a+b) = S a^2 + S b^2 + 2 S ab$$

$\stackrel{w}{=} c$

$$S c^2 = \nearrow$$

$c^2 = a^2 + b^2 + 2ab$  ist bekannter trigon. Satz.



$$S(a+b)(a-b) = S a^2 - S b^2$$

$$S(a+b)^2 = S a^2 + S b^2 + 2 S ab$$

$$S(a-b)^2 = S a^2 + S b^2 - 2 S ab$$

$$S(a+b)^2 + S(a-b)^2 = 2 S a^2 + 2 S b^2$$

Summe der Quadrate der Diagonalen = <sup>in einem Parallelogramm</sup> Summe der Quadrate aller vier Seiten.

$$S(a+b)^2 - S(a-b)^2 = 4 S ab$$

etc.

~~Wiederholung Fall (Ptolemy):~~

$$p = m a + n b + \lambda c$$

<sup>4</sup>/<sub>9</sub>  
In der Physik kommen solche Produkte fast überall vor, wo sonst  
worum gebraucht wird.

Größen vgl.  $\sum f$  Kräfte in einem Punkte an, so ist die Komponente  
nach der  $x$ -Achse:  $\sum S f_i = S \sum f_i$

Arbeit einer Kraft  $f$  an einem Punkte der sich um die Strecke  $a$   
bewegt:  $A = S f a$  (soll in Rotationsplan gemeint sein)

liegt  $a$  in der Richtung von  $f$  so ist dies  $= f a$ .  
ist es senkrecht  $= 0$

Die Arbeit sämtlicher Kräfte  $A = \sum S f_i a = S \sum f_i a$

bedeutet  $a$  die Geschwindigkeit also Strecke pro Zeiteinheit, so ist  
dies Arbeit pro Zeiteinheit also Effekt (nach Pferdekraft gemessen).

Ebenso: bedeutet  $d$  ein Drehungs moment in Bezug auf die Achse  $g$

.....  $c$  eine Winkelgeschwindigkeit " " "  $c$

so ist  $S d c$  die dadurch geleistete Arbeit pro Zeiteinheit.

ist  $e$  elektromotorische Kraft

$d$  dielektrische Verschiebung so ist  $S e d = \text{electrostatische Energie}$   
im Falle wo  $d = k e$   $= K S e^2$

ebenso  $h$  magnetische Kraft

$g$  Induktion

$S h g = \mu S h^2$  magnetische Energie

etc.

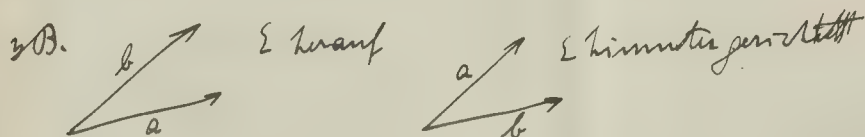


Definition:

$$V a b = a_0 b_0 \sin \alpha b. E$$

22

$E$  = Vektor  $\perp$  auf  $A$  und  $B$  und zwar so dass  $A, B, E$  ein rechtetes Koordinatensystem bilden (also in alphabetischer Reihenfolge)



Am besten macht man sich die Rechenregeln am Koordinatensystem  $i, j, k$

$$V i j = k \quad V j k = i \quad V k i = j \quad \begin{pmatrix} i & j \\ k & \end{pmatrix}^+$$

$$V j i = -k \quad V k j = -i \quad V i k = -j$$

$$\text{Sagen } V i^2 = V j^2 = V k^2 = 0$$

Allgemein: Vektor Produkt aus 2 Vektoren = Vektor der darauf  $\perp$  steht und dessen ~~Länge~~ <sup>Länge</sup> dem Produkt ihrer Längen gleich ist, Vektor Prod.  $\parallel$  Vektoren = 0

Einfache geometrische Bedeutung = Vektor Flächeninhalt

Rechenregeln:

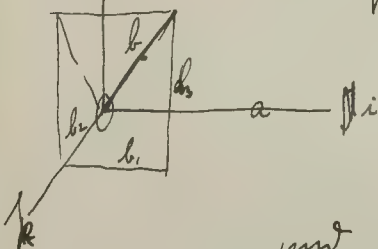
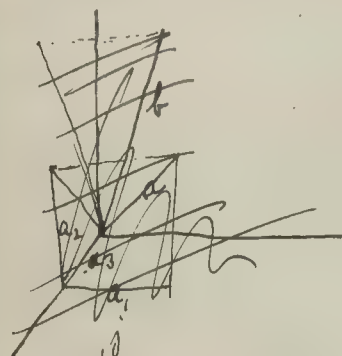
$$V \alpha a b = \alpha V a b \quad \text{etc. also auch } V a b = a_0 b_0 V A B$$

mit Skalaren kann multipl. werden, in dem man einen Faktor multipl., ganz wie sonst.

$$V a b = -V b a \quad \text{Sche wichtig; Unterschied gegen Skalare Multipl.}$$

6/4  
Dagegen gilt immer noch das distributive Gesetz:

$$V_a(b+c) = V_{ab} + V_{ac}$$



Wir nehmen die 1. Axe in Richtung a

setzen also  $a = a_0 i$

$$b = b_1 i + b_2 j + b_3 k$$

$$c = c_1 i + c_2 j + c_3 k$$

$$V_{ab} = a_0 V_i b = a_0 (b_3 k - b_2 j)$$

$$V_{ac} = a_0 (c_3 k - c_2 j)$$

$$V_a(b+c) = a_0 [(c_3 + b_3)k - (c_2 + b_2)j]$$

g. s. ob.

$$\text{Ebenso } V(a+b)c = V_{ac} + V_{bc}$$

$$\text{und } V(ab)(cd) = V_{ac} + V_{bc} + V_{ad} + V_{bd} \text{ etc.}$$

Also: Vektor-Produkt einer Summe = Summe der Vektorprodukte, dabei aber immer auf die Reihenfolge achtgeben!

Es gilt also wohl das distrib., aber nicht das commut. Gesetz (betrifft asso. werden wir später sehen, einstweilen betrachten wir nur Produkte von 2 ~~Vektoren~~ <sup>Vektoren</sup>). Trotzdem pflegt man auch diesen Operation: Multiplication zu nennen, also Vektor-Produkt. Grassmann nennt sie die äußere Multiplik. weil ~~man~~ von Überschneiden wenn die Vektoren aneinandergehen, aber = 0 wenn sie ineinanderfallen.

Vektor-Produkt und Polar-Produkt können also = Null werden, ohne dass einer ihrer Factoren = 0 wird; \* tiefgründige metaphysische Betrachtungen  
skp. 9385



darüber anzustellen ist ganz willkürlich, nachdem es ja ein bloßes Übereinkommen<sup>23</sup> ist, dass man diese Operation eben Multiplikation nennt. Dieser wäre vielleicht: Complication, um Missverständnisse mit scalarer Multipl zu vermeiden.

~~Anmerkung~~ Die Einführung dieser Begriffe ist ungemein praktisch, wie sich allerdings erst durch die Praxis zeigt, es ist mit ihnen viel leichter zu operieren als mit sin und cos selbst, wie Prof Reyerbach richtig bemerkt hat. Insbesondere wird V immer benutzt um Vektoren auszudrücken, die + stehen auf anderen.

~~Einflusspunkt~~ ~~Definition~~ Wendet man das distrib. Gesetz auf die ~~3~~ Komponenten form des Vektors an, so folgt:

$$\begin{aligned}
 a \cdot b &= V(a, b) \\
 V a b &= V(a, i + a_2 j + a_3 k)(b, i + b_2 j + b_3 k) = \\
 &= a_1 b_1 k + a_1 b_3 j + a_2 b_1 k + a_2 b_3 i + \\
 &\quad + a_3 b_1 j - a_3 b_2 i = \\
 &= i(a_2 b_3 - a_3 b_2) + j(\dots) + k(\dots)
 \end{aligned}$$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Einfache Anwendung:  $[I V a b]^2 = a_0^2 b_0^2 \sin^2(ab) = \sqrt{(a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + \dots}$

$$\sin^2(ab) = [\cos(a_2) \cos(b_3) - \cos(a_3) \cos(b_2)]^2 + \dots$$

bekannte Formel der analyt. Geometrie

$$\begin{aligned}
 &= a_0^2 b_0^2 [1 - \cos^2(ab)] = a_0^2 b_0^2 - [I a b]^2 \\
 &= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2 \quad \left| \begin{array}{l} \text{bekannte algebraische} \\ \text{Formel} \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

1/5 ~~Seite 10~~

Andererseits wenn man diese Formel als bekannt voraussetzt, kann man beweisen, dass festst.  $V_{ab} = \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix}$

dem Tensor ist richtig; Richtung wird ebenfalls sein wenn man, dass dem Vektor  $\text{inbegr. } \pm a, b$

~~und Richtung~~:  $\sum a V_{ab}$  nach Formel für Skalar Produkt entwickelt

$$= a_1 (b_2 b_3 - b_3 b_2) + a_2 (a_3 b_1 - a_1 b_3) + a_3 (a_1 b_2 - a_2 b_1) = 0$$

ebenso  $\sum b V_{ab} = 0$

also stimmt es. Durch Anwendung auf  $ijk$  wird auch leicht gezeigt, dass das ~~ebenfalls~~ stimmt.

Hier ist zum ersten Male eine Kombination von 3 Vektoren vorgekommen  $\sum a V_{ab}$   
allgemeine Form ~~ist~~  $\sum a V_{ab} = \sum a \cdot C a_0 b_0 \text{ usw.} = \text{Volumen eines}$   
Parallelepipeds ( $a b d$ ); ersp. leichter wird dies später besprochen werden.

In der Physik kommen ebenfalls V. immer vor, wo es sich darum handelt auszu-  
drücken dass Vektoren  $\perp$  aufeinander stehen.

20. ponderom Kraft auf einen Stromleiter mit  $\text{Strom } i$  in negative <sup>von Zeit gerichtet</sup>  
Feld  $H$  :  $= V i H$

Analog sollte nach Biot, Savart etc. Kraft wirken in elektrost. Feld

$$= V E \frac{dq}{dt}$$

Anderes Beispiel aus Kinematik

Starrs System dreht sich um ~~den~~ <sup>Winkel</sup>  $A$  mit ~~der~~ <sup>Winkel</sup>  $a$

Welches ist die Geschw. eines Punktes des Körpers

# Gesetze von Biot & Savart.

Biot-Savart: Kraft  $\vec{F} = \frac{i m}{r^2} \sin \theta \, ds$

$\frac{1}{r^2} ds$

und zwar  $\perp ds$ : Kraftlinien; Fleming forefinger = force  
middle = current  
thumb = motion } left hand

ds kann vorgelesen werden, wenn auf Stromlänge  $l$  in  $\vec{h}$  bezogen

$\frac{m}{r^2} = \frac{m}{r^2} = \text{Kraft in Biot } m = h$

$f = V i h - V (k e + k \frac{dh}{dt}) h$

Das entspricht bekannter Formel Maxwell'scher Theorie

Wenn Kraft vom magnetismus erzeugt so  $f = \sum V_i h = V_i \sum h = V_i h$ , wo unter  $h$  jetzt die Gesamtsärke des mag. Feldes verstanden wird, und zwar gilt dies unabhängig davon ob  $h$  fließt vom mag. Kern oder auch von magnet. elektr. Strömen herrührt. (Zufluss- und Verschleppungsströme)

Analog gilt nach Maxwell Kraft im elektrost. Feld:

$V e g = V e \frac{dh}{dt}$

welche jedoch experim.  $\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \frac{1}{r^2}$

Ebenso elektromagnetische Kraft bei Bewegung im mag. Feld:

$e = V a h \quad e = \text{Gute}$

Mechanik

Drehungsmoment =  $V a f$





$\frac{2}{5}$

Bevor wir aber zu ~~den~~ Anwendungen übergehen müssen wir noch Produktbildung von 3 ~~Produkt~~ Vektoren betrachten.

Skalare Produkte von  $a$  mit  $Vbc$  mittels Nenner

Was aber wenn 3 Vektoren zusammengefasst? 4 mögl. Skalar.

$$\cancel{S(a Sbc)} \quad S(a Vbc) \quad \begin{array}{cc} Va Sbc & Va Vbc \\ \hline Vbc & \end{array}$$

$$S(a Vbc) = S. a Vbc =$$

$$= a_0 S. A Vbc$$

$$= \text{Vol. des Parallelepipedes}$$

$$= S. b Vca = S. c Vab \quad \parallel \text{dagegen teilt man sich das wenn Ordng. vertauscht}$$

$$= -S. a Vcb = -S. b Vca = -S. c Vab$$

Natürlich auch in der Komponenten Form zu erhalten:

$$S. a Vbc = a_1(b_2 c_3 - b_3 c_2) + a_2(b_3 c_1 - b_1 c_3) + a_3(b_1 c_2 - b_2 c_1)$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

bekannte Formel der analyt. Geometrie für

Vol. eines Parallelepipedes

Nach bekannten Determinanten-Eigen

$$= - \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}$$

$$= -S. c Vab = S. b Vca \text{ etc.}$$

Setzt man  $i, j, k$  an Stelle

Es ist natürlich ein essentieller Unterschied zw. Formeln wie oben und

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$V_a V_{bc} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 & b_1 \\ c_2 & c_3 & c_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 & b_1 \\ c_2 & c_3 & c_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 & b_1 \\ c_2 & c_3 & c_1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 & b_1 \\ c_2 & c_3 & c_1 \end{vmatrix} = i [a_2 (b_1 c_1 - b_2 c_1) - a_3 (b_3 c_1 - b_1 c_3)]$$

$$= i [a_2 (b_1 c_1 - b_2 c_1) - a_3 (b_3 c_1 - b_1 c_3)]$$

$$= i [a_2 (b_1 c_1 - b_2 c_1) - a_3 (b_3 c_1 - b_1 c_3)]$$

$$= i [a_2 (b_1 c_1 - b_2 c_1) - a_3 (b_3 c_1 - b_1 c_3)]$$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 & b_1 \\ c_2 & c_3 & c_1 \end{vmatrix} = i [a_2 (b_1 c_1 - b_2 c_1) - a_3 (b_3 c_1 - b_1 c_3)]$$

$$= i [a_2 (b_1 c_1 - b_2 c_1) - a_3 (b_3 c_1 - b_1 c_3)]$$

$$= i [a_2 (b_1 c_1 - b_2 c_1) - a_3 (b_3 c_1 - b_1 c_3)]$$

$$= i [a_2 (b_1 c_1 - b_2 c_1) - a_3 (b_3 c_1 - b_1 c_3)]$$

$$V_a V_{bc} = b \Delta_{ac} - c \Delta_{ab}$$

Ohne weitere Rechnung setzt man ein, dass  $V_a V_{bc}$  in der Ebene  $b, c$  liegen muss also:

$$V_a V_{bc} = u b + v c$$

man  $u$  und  $v$  zu finden:

$$\Delta_{ab} V_a V_{bc} = u \Delta_{ab} b + v \Delta_{ab} c$$

$$= 0$$

$$V_a V_{bc} = [b \Delta_{ac} - c \Delta_{ab}] x$$

durch Umklappung findet man  $x = 1$   
 weil  $x$  in Bezug auf  $a, b, c$  von Roten = 0 sein muss, daher symmetrisch.

Auch auf andere Weise

$$\vec{r}_a \cdot \vec{V}_{bc} = a_1 \vec{r}_i \cdot \vec{V}_{bc} + a_2 \vec{r}_j \cdot \vec{V}_{bc} + a_3 \vec{r}_k \cdot \vec{V}_{bc}$$

Anwendung

d zerlegen in Richtungen von a, b, c

$$\int d = ax + by + cz \quad | \vec{V}_{bc}$$

$$\int \vec{r}_a \cdot d = \int \vec{r}_a \cdot \vec{V}_{bc} \quad \int \vec{r}_a \cdot \vec{V}_{bc} = x \int \vec{r}_a \cdot \vec{V}_{bc}$$

$$x = \frac{\int \vec{r}_a \cdot \vec{V}_{bc}}{\int \vec{r}_a \cdot \vec{V}_{bc}}$$

$$d = \frac{1}{\int \vec{r}_a \cdot \vec{V}_{bc}} [a \int \vec{r}_a \cdot \vec{V}_{bc} + b \int \vec{r}_a \cdot \vec{V}_{ca} + c \int \vec{r}_a \cdot \vec{V}_{ab}]$$

Einfachste Art haben wir oben kennen gelernt:

$$d = i \int d_i + j \int d_j + k \int d_k$$

10. Drehungsmoment  $\sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i$

Kennzeichen <sup>Drehungsmoment</sup> = ~~ist~~ so ~~Drehungsmoment - Component =~~  $\sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i$

Arbeit  $\int \vec{r}_i \cdot \vec{F}_i$

$\vec{r}_i \cdot \vec{V}_{ab} = 0$  bedeutet Ebene ab, weil nur dann  $\vec{V}_{ab} = 0$

Früher haben wir dies in Form geschrieben  $r = ax + by$

das ist äquivalent weil r die Skalargröße ist.

$\vec{r}_i \cdot \vec{V}_{ab} = 0$  bedeutet Gerade  $\perp$  ab

Auch in der Form  $r = \vec{r}_i \cdot \vec{V}_{ab}$



Andere Art von Taylor

$$d = x V_{ab} + y V_{bc} + z V_{ca}$$

$$S_{ad} = x \quad d = x V_{bc} + y V_{ca} + z V_{ab}$$

$$S_{ad} = x S_a V_{bc} \quad \text{etc.}$$

$$d = \frac{V_{bc} S_{ad} + V_{ca} S_{bd} + V_{ab} S_{cd}}{S_a V_{bc}}$$

Wollen jetzt zu ~~der~~ Anwendung auf Geometrie übergehen; werden wenn  
etwas theoretisch Neues vorkommt, es an speziellen Beispielen <sup>dabei</sup> ~~begegnen~~ <sup>näher erläutern</sup>.

Geometrie der Geraden und Ebene

Gibt zugleich Beispiel für implizite Vertiefung

10.  $S_a x = 0$  Ebene  $\perp a$  durch 0

$S_a (x-b) = 0$  " durch Mittelpunkt von  $b$

Normalform ~~Gerade in Form~~ auch in Form  $S_a x = m$  dem:

~~$S_a b = m$~~   ~~$b$  ist ein Punkt in der Ebene~~

$S_a r = \frac{m}{a_0}$   $r_0$  ist  $= \frac{m}{a_0}$  bedeutet Ebene in Abstand  $\frac{m}{a_0}$

~~Frage: Was ist die implizite Vertiefung? kann gelöst werden~~

$V_a x = 0$  bedeutet Gerade in Richtung  $a$  durch 0

äquivalent mit  $r = wa$

$V_a (x-b) = 0$  Gerade  $\parallel a$  durch Mittelpunkt von  $b$   $\parallel$  bedeutet mit  $r = b + wa$

~~Auch in Form~~  $V_a r = c$   ~~$c = V_a b$~~

2  
6 Wie findet man aus letzter Gleichung  $\vec{b}$  &  $\vec{c}$  ?

$$\vec{r} \cdot \vec{a} = \vec{r} \cdot \vec{b} \cos \alpha = a \cos \alpha = b \cos \alpha$$

Man kann es aber leicht nicht finden, unbekannt  
Denn eben nicht die Gleichung eines Geraden sondern einer Ebene!  
Wenn man das  $\vec{b}$  aus  $\vec{r} \cdot \vec{b} \cos \alpha$  bestimmen wollte so geht das nicht  
Denn Gleichung ist Gleichung einer Geraden welche in der Ebene  $\perp \vec{c}$   
durch  $\vec{a}$  geleitet ist, so liegt dann die  $\parallel \vec{a}$  und in Abstände

$\frac{c_0}{a_0}$  ist.

Was bedeutet  $\vec{r} \cdot \vec{b} \cos \alpha = 0$ ? Ebene durch  $O$ ,  $\parallel \vec{b}$ , weil der Vektor  
früher hatten wir die explizite Form  $\vec{r} = u\vec{b} + v\vec{c}$  herausgefunden  
allgemeinverständlich identisch

Beweis, indem diese  $\vec{r}$  erzeugt wird  
Denn  $\vec{r} \cdot \vec{b} \cos \alpha = 0$  dasselbe

Es ist ja eigentlich dieselbe Formel wie vorher, nur dass  $\vec{c}$  statt  $\vec{b}$   
steht  
also auch von Bedeutung von

$$\vec{r} \cdot \vec{b} \cos \alpha = m \quad \text{Ebene } \parallel \vec{b}, \vec{c}, \text{ in Abstand } \frac{m}{b \cos \alpha}$$

Bedeutet den Vektor  $\vec{b}$  parallel  $\vec{c}$  = nicht gleich.

Was bedeutet  $\vec{r} \cdot \vec{b} \cos \alpha = 0$ ?

= Gerade  $\perp \vec{b}, \vec{c}$ , durch  $O$

In der Tat Gerade  $\perp \vec{b}, \vec{c}$ , kann auch geschrieben werden:

$$\vec{r} = u\vec{b}, \text{ dies macht obigen Ausdruck } = 0$$

Soll sie nicht durch 0 Punkt sondern Punkt  $a$  durchgehen.

$\frac{3}{6}$

$$V(r-a) \cdot V(b-c) = 0 \quad r = a + uV(b-c)$$

27

Auch  $V(r-a) \cdot V(b-c) = 0 = \text{Gerade} \perp bc$ , in Ebene.

Ebene, welche durch die Gerade  $r = u a + b$   
und den Punkt  $c$  geht wird:

unser Vektor  $a$  und Vektor  $b-c$  enthalten

$$V(r-b) \cdot V(a(b-c)) = 0$$

Ebene durch 3 Punkte  $a$   $b$   $c$

$$V(r-a) \cdot V(a-b)(a-c) = 0$$

20. Ebene welche durch die drei Abh.  $l, m, n$ , charakterisiert ist

$$V(r-il) \cdot V(il-jm)(il-kn) = 0$$

Vereinfacht:

$$V(r-il)(jln + klm + imn) = 0$$

$$Vr(jimn + jln + klm) = lmn$$

Das kommt äquivalent auf die gewöhnl. Form der analyt. Geometrie zurück wenn  $l$  eintreffend wird.

$$\frac{x}{l} + \frac{y}{m} + \frac{z}{n} = 1$$



Diese Form insbesondere in Kristallographie gebräuchlich  
Satz der rationalen Ableitungen. Anstatt  $i, j, k$  kann auch  
 $a, b, c$  gesetzt werden od. für triklin. System.

Früher hatten wir eine andere Form der Ebene aufgestellt

$$x = a + u(b-c) + v(a-b)$$

Dies muss jene Gleichung erfüllen: Normalenläng.

$$u \underbrace{(b-c)}_{\perp} \underbrace{V(a-b)(a-c)}_{=0} + v \underbrace{(a-b)}_{\perp} \underbrace{V(a-b)(a-c)}_{=0} = 0$$

$$= -u(a-b)V(a-b)(a-c)$$

$$+ v(a-c)V(a-b)(a-c) = 0$$

~~Abstand in d~~

Alle diese Formen sind aber in  $\mathcal{L}(ax+by)=0$  enthalten  
oder  $\mathcal{L}ax = m$

2 Ebenen  $\mathcal{L}ax = m$

$\mathcal{L}ax' = n$  sind parallel, weil beide  $\perp a$

$$\text{Abstand} = \frac{m-n}{a_0}$$

$$\mathcal{L}ax = m$$

$\mathcal{L}bx' = n$  bilden einen Winkel  $\angle ab$

Wenn  $x = x'$  so ist dies eine Gerade, geometrische Konstruktion ergibt

das ohne weiteres, aber auch aus Formeln

$$\begin{array}{l|l} \text{Sa}x = m & \cdot b \\ \text{Sb}x = n & \cdot a \end{array}$$

$$b \text{Sa}x - a \text{Sb}x = bm - an = \overline{V_r} \overline{V_b} a$$

Stellung eines Geraden  $\parallel \overline{V_b} a$   
also  $\perp a, \perp b$

im Abstand

$$\text{Sa}x = m$$

Kürzester Abstand für den Fall dass  $x \parallel a$ ,

$$\text{denn } \text{Sa}x = a_0 x_0 = m$$

$$\text{also } x_0 = \frac{m}{a_0}$$

~~Aus der Maximal-Aufgabe~~

Nach der Form

$$x = a + bu + cv \quad \text{kann es weiter auch umgewandelt werden} \rightarrow$$

$$\overline{V_r} x = \overline{V_r} a + u \overline{V_r} b$$

$$\text{Sb} \overline{V_r} x = \text{Sb} \overline{V_r} a$$

$$\text{Sb} \overline{V_r} b = \text{Sb} \overline{V_r} a \quad \text{also} \quad x_0 = \frac{\text{Sa} \overline{V_r} b}{\text{Sb} \overline{V_r} b}$$

oder auch Maximal-Min-Aufgabe:

$$T x^2 = \text{Sa}^2 = \text{S}(a + bu + cv)^2$$

$$\frac{dT(x^2)}{du, v} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial u} (a+bu+cv)^2 = 0$$

Introduce cross multiplies

$$\frac{\partial}{\partial u} (a^2 + b^2 u^2 + c^2 v^2 + 2abu + 2acv + 2bcuv) = 0$$

~~2ab~~

$$2u \cancel{ab} + 2 \cancel{ab} + 2v \cancel{bc} = 0$$

$$v \cancel{c^2} + \cancel{ac} + u \cancel{bc} = 0$$

$$u = \frac{\begin{vmatrix} \cancel{ab} & \cancel{bc} \\ \cancel{ac} & \cancel{c^2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cancel{ab} & \cancel{bc} \\ \cancel{bc} & \cancel{c^2} \end{vmatrix}} = \frac{c_0 \cancel{ab} - \cancel{ac} \cancel{bc}}{b_0^2 c_0^2 - (\cancel{bc})^2}$$

$$\text{also: } v = \frac{b_0^2 \cancel{ac} - \cancel{ab} \cancel{bc}}{b_0^2 c_0^2 - (\cancel{bc})^2}$$

$$r = a + \frac{b [c_0 \cancel{ab} - \cancel{ac} \cancel{bc}] + c [b_0 \cancel{ac} - \cancel{ab} \cancel{bc}]}{b_0^2 c_0^2 - (\cancel{bc})^2}$$

$$= a \cancel{b_0^2 c_0^2} + b \cancel{c_0^2} \cancel{ab} + c \cancel{b_0^2} \cancel{ac} +$$

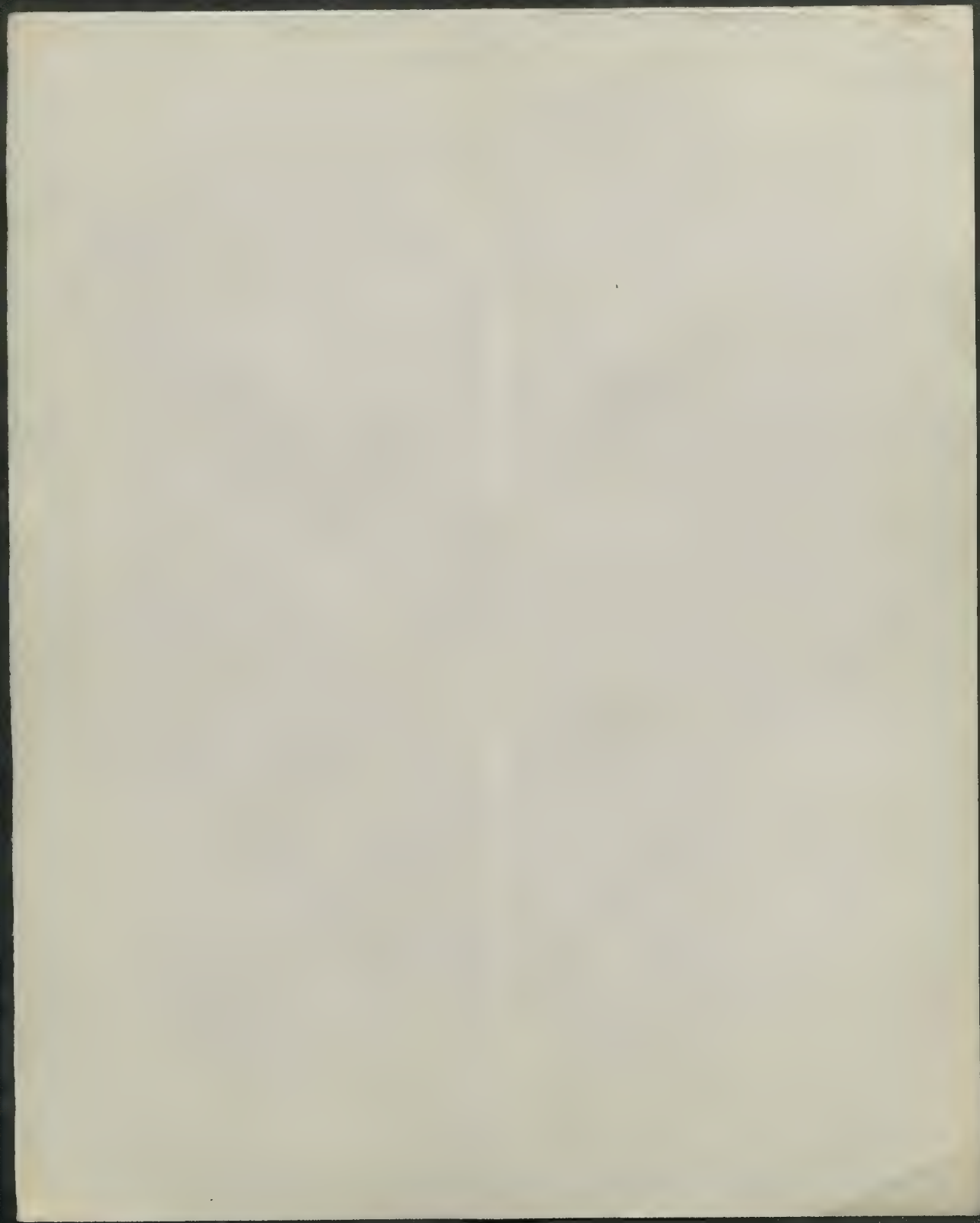


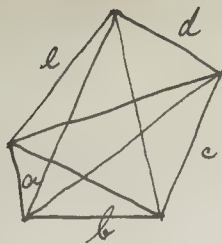
$$\int_n V(a-b)(a-b) = \int_a V(b-b)(a-b)$$

$$\mu = \frac{\int_a V(a-b)(a-b)}{T V(a-b)(a-b)} = \frac{+ \int_a V(ab+ac+bc)}{T V(ab+ac+bc)} = + \frac{\int_a Vbc}{T V(ab+ac+bc)}$$

$$= \frac{6 \cdot Vol(ab)}{T V(ab+ac+bc)}$$

$$T V(ab+ac+bc) = \frac{6 \cdot Vol(ab)}{\mu} = 2 \cdot Fläch(ab)$$





Flächeninhalt =

$$\frac{1}{2} (Vab + V(a+b)c + V(a+b+c)d) =$$

$$\frac{1}{2} (Vab + Vac + Vbc + Vad + Vbd + Vcd)$$

$$\text{Flächeninhalt} = \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^n V_{d_i, s_i} \right) + \underbrace{V(a+b+c+d)e}_{=0} = \frac{1}{2} \sum V_{d_i, s_i}$$

Gilt auch räumlich

Wenn man id.  $e = f + g$ :

So kommt dazu  $+ Vfg$

man ist aber  $g = -(a+b+c+d+e+f)$

$$\text{also } -Vf(a+b+ \dots ) = V(a+b+ \dots )f$$

Auch für räumliche Polyederartige Gebilde:  $\sum \text{Vektorprodukte} =$

$\sum \text{Vector Products von je zwei Kanten des äußeren Begrenzungsgebietes}$

Somit für geschlossenes Polyeder  $= 0$

Auch in anderer Weise:



$\frac{3}{7}$

$$r = a \cos u + b \sin u$$

$$\vec{r} = (a \hat{i} + b \hat{j}) \cos u + \dots$$

$$r^2 = a^2$$

$$r = A(i \cos u + j \sin u)$$

$$r = A[i \cos u + j \sin u + k \sin u]$$

$$s = uA$$

$$r = A[i \cos \frac{s}{A} + (j \cos \alpha + k \sin \alpha) \sin \frac{s}{A}]$$

$$\frac{dr}{ds} = -i \sin \frac{s}{A} + \cos \frac{s}{A} (j \cos \alpha + k \sin \alpha)$$

$$\frac{d^2r}{ds^2} = -\frac{1}{A} [i \cos \frac{s}{A} + \sin \frac{s}{A} (j \cos \alpha + k \sin \alpha)] = -\frac{r}{A^2}$$

$$r = A(i \cos u + j \sin u) + Bk u$$

$$r' = -A(i \sin u - j \cos u) + Bk$$

$$r_1 = r + v r' = A(i \cos u + j \sin u) + Bk u + v [-A(i \sin u - j \cos u) + Bk]$$

$$\text{In } x, y \text{ in } u = -v$$

$$r_1 = A[i(\cos u + u \sin u) + j(\sin u - u \cos u)]$$

$$r_1^2 = 1 + u^2$$

$$r_1 = \sqrt{1 + u^2}$$

Spirale

$$r = a \varphi(u, v) + b \psi(u, v) + c \chi(u, v)$$

$$\frac{\partial r}{\partial u} = \left( a \frac{\partial \varphi}{\partial u} + b \frac{\partial \psi}{\partial u} + c \frac{\partial \chi}{\partial u} \right)$$

$$\frac{\partial r}{\partial v} = a \frac{\partial \varphi}{\partial v} + b \frac{\partial \psi}{\partial v} + c \frac{\partial \chi}{\partial v}$$

$$N = UV \frac{\partial r}{\partial u} \frac{\partial r}{\partial v} = V \dots$$

Im speziellen Fall  $r = i \varphi(u, v) + \dots$

$$N = U \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \chi}{\partial u} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial v} & \frac{\partial \psi}{\partial v} & \frac{\partial \chi}{\partial v} \end{vmatrix}$$

~~Skalarform~~ 2D. Gleichung einer Kugel

$$\cancel{r = i \cos u + j \sin u + k \sqrt{1 - u^2}}$$

$$r = i u + j v + k \sqrt{1 - u^2 - v^2}$$

$$\frac{\partial r}{\partial u} = i + k \frac{u}{\sqrt{1 - u^2 - v^2}}$$

$$\frac{\partial r}{\partial v} = j + k \frac{v}{\sqrt{1 - u^2 - v^2}}$$

$$N = UV \frac{\partial r}{\partial u} \frac{\partial r}{\partial v} = U \left[ k + \frac{jv + iu}{\sqrt{1 - u^2 - v^2}} \right] = U \left[ \frac{r}{\sqrt{1 - u^2 - v^2}} \right] = U k$$

Was auch umgekehrt als Definition der Kugel hätte gelten können

Nun geben in ~~Form~~ Skalarform

$$r = ix + jy + kz$$

So selbstverständlich

$$F(x, y, z) = 0$$

~~Skalarform~~

$$\frac{\partial r}{\partial x} = i + k \frac{\partial z}{\partial x}$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = j + k \frac{\partial z}{\partial y}$$

nicht mathematisch  
veränderlich

57

$$U \left[ (i + k \frac{\partial}{\partial x}) (j + k \frac{\partial}{\partial y}) \right] = U \left[ k - i \frac{\partial}{\partial x} - j \frac{\partial}{\partial y} \right]$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \quad = U \left[ k \frac{\partial F}{\partial x} - i \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial z} - j \dots \right]$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \quad = U \left[ i \frac{\partial F}{\partial x} + j \frac{\partial F}{\partial y} + k \frac{\partial F}{\partial z} \right] = U(\nabla F)$$

Nachher natürlich auch die Formel der analyt. Geometrie folgt:

$$\cos(Nx) = \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\sqrt{(\dots)^2}} \quad \text{etc.}$$

Ein implizite Vektor f. dessen I keine allg. Regel festsetzen

20.  $I r = a_0$  Kugel

$I r^2 = a_0^2$  Tensor ist ein unpraktisches Teilchen, man nutzt es meist in dieser Weise;  $T(a+b)$  ist nicht  $Ta+Tb!$  während wohl bei  $I$  und  $V$

hier werden also darauf geachtet zu untersuchen wie Ausdrücke unter  $I$  und  $V$  differenzierbar werden können. Ganz so wie sonst

$$\frac{d}{du} I a r = \lim \frac{I a(r+\Delta r) - I a r}{\Delta r} = I a \frac{dr}{du} \quad \text{etc.}$$

~~hier 20.  $\frac{d}{du} I a r = I a \frac{dr}{du}$~~

Ebenso auch hier:

$$\begin{aligned} I r^2 &= a_0 \\ I r^4 &= a_0 \\ I r^{(2n-2)} &= 0 = 2r \frac{dr}{du} \end{aligned}$$

$$2 I r dr = 0$$

das ~~ist~~ willkürliche  $dr$  muss also auf  $r \neq 0$  stehen

Da sieht man gleich, um wieviel diese Form der Gleichungen bequemer ist als die anderen ~~etc.~~



Natürlich kann man dann <sup>die</sup> Gleichung der Tangente über und die Normale <sup>so</sup> sofort hinschreiben

32

In erster Form:

$$S(r' - r) = 0$$

$$r' = r + u N$$

$$V(r' - r) N = 0$$

Überträgt in zweite Form, ~~aber die allgem. Formel können wir noch nicht~~  
~~hinschreiben~~  $S \cdot \nabla F(r' - r) = 0$   $V \cdot \nabla F(r' - r) = 0$

Für die dritte Form können ~~die~~ wir die allgem. Formel <sup>nach</sup> nicht  
hinschreiben.

Raum Curven

$$r = a \varphi(u) + b \psi(u) + c \chi(u) \quad = \Phi(u) \quad (z.B. \text{ wenn } u = s \text{ Bogenlänge})$$

$$dr = (a \varphi' + b \psi' + c \chi') du \quad \text{in der Richtung der Tangente}$$

Gleichung der Tangente:  $= \Phi'(u)$

$$r' = r + v (a \varphi' + b \psi' + c \chi')$$

Normalebene:

$$S(r' - r) (a \varphi' + b \psi' + c \chi') = 0$$

$$S(r' - r) \Phi'(u) = 0$$

<sup>Schnittungs-</sup>  
Condition Ebene ist diejenige, welche zwei aufeinander senkrechte Vektoren  
enthält: also Vektor  $dr$  und  $dr + d^2r = (\Phi'(u) + \Phi''(u) du) du$

$$\text{Ebene Gleichung: } S(r' - r) V \Phi'(u) \Phi''(u) = 0$$

$\frac{d}{ds}$   
 mit Richtung der Normale auf die Schwingungs Ebene = Binormale  
 $= \sqrt{\Phi' \Phi''}$

Hauptnormale  $\perp$  Tangente in der Osculations Ebene  
 also  $\perp$  Tangente und auf Binormale

$$V \cdot \Phi' V \Phi' \Phi'' = \left[ \Phi' \int \Phi' \Phi'' - \Phi'' \int \Phi' \Phi' \right] \neq 0$$

Wenn man  $s$  als unabhängige Variable:

$$T dr = ds$$

$$T \frac{dr}{ds} = 1 \quad \text{dann ist } \Phi' = \text{Einheitsvector in Richtung der Tangente}$$

$$T \Phi' = 1$$

$$\int \Phi'^2 = 0$$

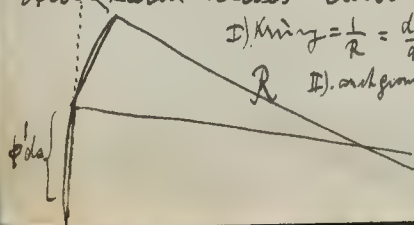
$$\int \Phi' \Phi'' = 0 \quad \text{also } \Phi'' \text{ steht dann } \perp \Phi'$$

Dann ist die ~~Binormale~~  $V \Phi' \Phi''$  Hauptnormale in Richtung  $\Phi''$

Wir haben also das rechtwinklige System der Tangente, Hauptnormale

Binormale:  $\Phi', \Phi'', V \Phi' \Phi''$

~~Zwei~~ Zwei aufeinanderfolgende Tangenten ~~sind~~ liegen in der Oscul. Ebene  
 Also kann dieses Curvenstück als eben angesehen werden Haupt-



$$I) \text{ Krümmung} = \frac{1}{R} = \frac{d\phi}{ds} = \frac{d^2r}{ds^2}$$

$$R \quad II) \text{ archimeditisch: } R_0: ds = \Phi' ds : \Phi'' ds$$

Krümmungsradius

$$R_0 = \frac{\Phi'}{\Phi''}$$

$$\frac{1}{R_0} = \frac{\Phi''}{\Phi'}$$

$$T R = \frac{1}{T \Phi''}$$

# Anwendungen

3  
8  
33

Kreis beschreibung haben wir schon kennen gelernt in Form

$$r = \frac{A}{\omega} (i \cos x + j \sin x)$$

implizite Form:  ~~$T \cdot \frac{v}{R} = \omega$~~

$$\begin{cases} T r = m \\ \int a r = 0 & \int a dr = 0 \\ \int r^2 = m^2 & \int r dr = 0 \end{cases}$$

$$dr = (-i \sin x + j \cos x) dx$$

Wenn die Bogenlänge s als unabh. Var. eingeführt wird:

$$r = A (i \cos \frac{s}{A} + j \sin \frac{s}{A})$$

$$dr = A (-i \sin \frac{s}{A} + j \cos \frac{s}{A})$$

$$d^2 r = -\frac{1}{A} (i \cos \frac{s}{A} + j \sin \frac{s}{A}) = -\frac{r}{A^2} = \frac{1}{R}$$

bedeutet also: Krümmungsradius in der Richtung des Radius und Länge constant

## Kinematische Anwendung

$$r = \Phi(t) = a \varphi(t) + b \psi(t) + c \chi(t)$$

$$\dot{r} = \dot{\Phi}(t) = \text{Geschw.} = \frac{dr}{ds} \frac{ds}{dt} = v \frac{dr}{ds} \quad T=t$$

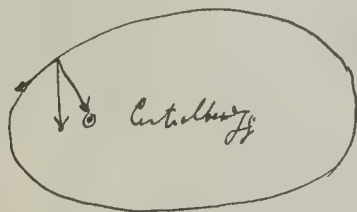
$$\ddot{r} = \text{Beschl.} = \frac{dv}{dt} \frac{dr}{ds} + v \frac{d^2 r}{ds^2 dt}$$

$$= \frac{dv}{dt} \frac{dr}{ds} + v \frac{d^2 r}{ds^2} \frac{ds}{dt} = v \frac{dr}{ds} + v^2 \frac{d^2 r}{ds^2} \quad \text{also } \frac{d^2 r}{ds^2} = \frac{1}{R} \quad \text{also } \frac{d^2 r}{ds^2} = \frac{1}{R}$$



$\frac{4}{8}$  Daraus folgen also die bekannte Sätze über Centrifugalkraft, diese ist nicht anders als das Str- $m \frac{v^2}{R}$ ; es muss also eine Kraft wirken sein, wenn  $v$  geändert wird und auch wenn eine Krümmung der Bahn eintritt.

10. Wenn ein Körper an einem Faden befestigt herumrotiert, so ist die Kraft, welche dieser Centrifugalkr. Gleichgewicht hält = Spannung des Fadens.



Die Kraft = Druck; dieser wirkt in Richtung der Bahn verwendet auf Änderung des absoluten Werts der Geschw.  $\perp$  darauf, auf Änderung der Richtung.

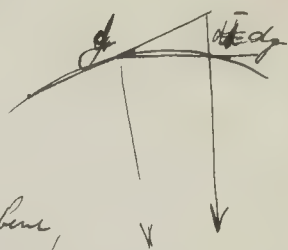
Soweit war alles noch einfach; viel complicierter, wenn man das eigentlich Charakteristische der Raumcurven in Betracht zieht, nämlich die Torsion. Doch liegt die Schwierigkeit nicht in der Rechnung, diese ist in unserem Falle ungemein einfach ~~sondern~~, im Gegensatz zur analyt. Geom., sondern in der räumlichen Vorstellung.

Wir haben das System der 3 rechth. Vektoren Tangente, Hauptnormal, Binormal. Diese sind in ihrer gegenwärtigen Lage unveränderlich, e<sup>1</sup> denn

bleibt ihre Lage im Raum, beim Fortschreiten auf der Curve.

Wenn sie  $\parallel$  bleiben, so hätten wir eine Gerade, aber wenn eigentlich  $\perp$  und  $\perp$  unbestimmt. Wenn noch eine Drehung um  $b$  dazukommt, also Änderung von  $\frac{d}{d}$   $h$ , so wird es eine ebene Curve, und das Maß der Krümmung ist

gegeben durch Länge des Krümmungsradius, ebenso die Richtung derselben durch die Änderung in der Richtung der Tangente



Wenn nun noch eine Drehung der Osculations Ebene, also des Stausystems überhaupt um die Tangente  $h$  dazukommt, so wird die Curve eine räumliche, diese nennt man die Torsion oder Windung der Curve; diese ist also definiert durch den Winkel welchen zwei aufeinanderfolgende Osculations Ebenen, oder was dasselbe ist 2 aufeinanderfolgende Binormalen bilden. Man kann sie ebenso wie die Krümmung messen; Torsions Radius in Richtung der Änderung der Binormale also wieder nach dem Krümmungssatze gerichtet und seine Länge bestimmt durch:

$$\text{recipr. Torsionsradius} = \text{Torsion} = \frac{\text{Winkel der Binormalen}}{\text{Bogen } ds}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau} &= \frac{d}{ds} \left( \frac{1}{\rho} \right) \frac{dr}{ds} = \frac{d}{ds} \left( \frac{1}{\rho} \right) \frac{dr}{ds} = \\ &= \frac{d}{ds} \left( \frac{1}{\rho} \right) \frac{dr}{ds} = \frac{d}{ds} \left( \frac{1}{\rho} \right) \frac{dr}{ds} = \end{aligned}$$

$$\nabla f \cdot g = 0$$

$$\nabla f \cdot h = 0$$

$$\text{denn } = \nabla f \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{1}{2} \frac{d \cdot S^2}{ds} = 0$$

also steht  $f \perp b, g$   
also in Richtung  $h$

$$\frac{6}{8} \frac{1}{g} f_0 = \frac{1}{T_0} = \int h V g \frac{dh}{ds}$$

$$= - \int g V h \frac{dh}{ds}$$

{ Dies darf man nicht  $= \frac{d}{ds} V h^2 = 0$  setzen!

$$\text{Sondern } V h \frac{dh}{ds} = - V \frac{dh}{ds} h$$

$$\frac{d}{ds} V h h =$$

$$V h' h' = 0$$

$$V (h h - h' h') = 0$$

$$V h h - h' h + h' h - h' h' = 0$$

$$= V h (h - h') h + h' (h - h') = 0$$

$$V h dh + V h' dh = 0$$

$$\cancel{h} = \cancel{R} = R_0 h$$

$$\frac{d^2 r}{ds^2} = \frac{1}{R} = \frac{h}{R_0}$$

$$h = R_0 \frac{d^2 r}{ds^2}$$

$$f_0 = - \int \frac{dr}{ds} V R_0 \frac{d^2 r}{ds^2} \left[ \frac{dR_0}{ds} \frac{d^2 r}{ds^2} + R_0 \frac{d^3 r}{ds^3} \right]$$

$$= - R_0^2 \int \frac{dr}{ds} V \frac{d^2 r}{ds^2} \frac{d^3 r}{ds^3}$$

$$T_0 = - \frac{\left( \frac{d^2 r}{ds^2} \right)^2}{\int \frac{dr}{ds} V \frac{d^2 r}{ds^2} \frac{d^3 r}{ds^3}}$$

$$\frac{d^2 r}{ds^2} = i \frac{d^2 x}{ds^2} + j \frac{d^2 y}{ds^2} + k \frac{d^2 z}{ds^2} \quad (\text{§ 262 Serret})$$

$$= - \frac{\left( \frac{d^2 x}{ds^2} \right)^2 + \left( \frac{d^2 y}{ds^2} \right)^2 + \left( \frac{d^2 z}{ds^2} \right)^2}{\left| \begin{array}{ccc} \frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds} & \frac{dz}{ds} \\ \frac{d^2 x}{ds^2} & \frac{d^2 y}{ds^2} & \frac{d^2 z}{ds^2} \end{array} \right|}$$

was mit Formel im § 275 Serret übereinstimmt  
wenn  $s = \text{Umläng. } V$



# Anwendung der Integralrechnung

Früher schon kennen gelernt:

37  
8  
35

$$r = A [i \cos u + j \sin u] + B k u$$

Wenn wir  $s$  einführen wollen, so müssen wir erst wissen, wie  $s$  mit  $u$  zusammenhängt.  
(Man beliebige Funktionen von  $u$  einem  $r$  gleichsetzen, gilt immer ein  $u$ ,  
nicht aber beliebige Funktionen von  $s$ , sonst kann man innere Widersprüche  
haben)

$$dr = \{ A [-i \sin u + j \cos u] + B k \} du$$

$$(dr)_0 = ds = du \sqrt{A^2 + B^2}$$

$$\text{Abkürzung: } A^2 + B^2 = C^2$$

$$s = C u + \text{const.}$$

$$\text{denn } r = A [i \cos \frac{s}{C} + j \sin \frac{s}{C}] + \frac{\sqrt{C^2 - A^2}}{C} k s$$

$$\frac{dr}{ds} = \frac{A}{C} [-i \sin \frac{s}{C} + j \cos \frac{s}{C}] + k \frac{\sqrt{C^2 - A^2}}{C} \quad \parallel \quad \text{Sk } \frac{dr}{ds} = \text{const. also konst. } r \text{ mit } k \text{ bzw.}$$

$$\frac{d^2 r}{ds^2} = -\frac{A}{C^2} [i \cos \frac{s}{C} + j \sin \frac{s}{C}] \quad \text{also } \perp k$$

$$R_0 = \frac{1}{\left(\frac{d^2 r}{ds^2}\right)_0} = \frac{1}{\frac{A}{C^2}} = \frac{C^2}{A} \quad \text{also konstanter Krümmungsradius}$$

$$\begin{aligned} \cancel{R_0} &= \cancel{R_0} \frac{ds}{du} \\ b &= \int \sqrt{\frac{dr}{ds} \frac{dr}{ds}} = \int \sqrt{\left( \frac{A}{C} \right)^2 \left( \sin^2 \frac{s}{C} + \cos^2 \frac{s}{C} \right) + \left( \frac{\sqrt{C^2 - A^2}}{C} \right)^2} ds \\ &= \int \sqrt{\frac{A^2}{C^2} + \frac{C^2 - A^2}{C^2}} ds = \int \frac{C}{C} ds = \int ds = s \end{aligned}$$

|                      |                                   |                                   |                              |  |
|----------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|------------------------------|--|
|                      | $i$                               | $j$                               | $k$                          |  |
| $\frac{dr}{ds}$      | $-\frac{A}{C} \sin \frac{s}{C}$   | $\frac{A}{C} \cos \frac{s}{C}$    | $\frac{\sqrt{C^2 - A^2}}{C}$ | $= i \frac{A}{C} \sin \frac{s}{C} + j \frac{A}{C} \cos \frac{s}{C} + k \frac{\sqrt{C^2 - A^2}}{C}$ |
| $\frac{d^2 r}{ds^2}$ | $-\frac{A}{C^2} \cos \frac{s}{C}$ | $-\frac{A}{C^2} \sin \frac{s}{C}$ | $0$                          | $= -\frac{A}{C^2} (i \cos \frac{s}{C} + j \sin \frac{s}{C})$                                       |

Wichtig

$$R = R_0 \frac{dr}{ds} = - \left[ i \cos \frac{s}{c} + j \sin \frac{s}{c} \right]$$

$$f = T g \frac{ds}{ds}$$

$$f = \frac{db}{ds} = i \frac{\sqrt{c^2 - A^2}}{c^2} \cos \frac{s}{c} + j \frac{\sqrt{c^2 - A^2}}{c^2} \sin \frac{s}{c} \quad \text{also natürlich wieder } \perp k$$

$$f_0 = \frac{\sqrt{c^2 - A^2}}{c^2} \quad T_0 = \frac{c^2}{\sqrt{c^2 - A^2}} = \frac{A R_0}{\sqrt{c^2 - A^2}} = \frac{A}{\beta} R_0$$

also konstante Torsion

Aus Formel für  $b$  sieht man dass  $s$  mit  $k$  bzw.  $\beta$  unvariiertlich.

Desto größere Torsion je kleiner  $T_0$  also je größer (B.zgl.) die Ganghöhe

man könnte jetzt leicht die Curve finden, welche der Krümmungsmittelpunkt beschreibt; wäre ebenfalls eine Schraubenlinie. (= Evolute für diese Curven)

Evolute ist hier ebenfalls leicht zu bilden

$$r_1 = r + \frac{dr}{ds}$$

Gibt man in unserem Falle:

$$r_1 = A \left[ i \left( \cos \frac{s}{c} + \frac{A}{c} \sin \frac{s}{c} \right) + j \left( \sin \frac{s}{c} - \frac{A}{c} \cos \frac{s}{c} \right) \right]$$

$|r_1|^2 = A^2 \left( 1 + \frac{A^2}{c^2} \right)$  ~~gibt~~ Endpunkt eines Fadens, welcher auf der Schraubenlinie aufgewickelt ist, und in die Richtung der Tangente gespannt wird, beschreibt also eine Spirale in der  $IT$  Ebene.

Dies ist leicht begreiflich, wenn man sich vor die Schraubenlinie dadurch vorstellen denkt, dass ein schief zugeschnittenes Papier auf einen Zylinder auf- und abgerollt wird.

Mit Raum Curven werden wir nicht viel zu thun haben, viel mehr mit  $\frac{4}{9}$  Raumflächen. Überhaupt ist die Geometrie der Raum Curven noch sehr wenig 36 entwickelt.

Beispiele wären noch: Toroid-Schraublinie (Solonit eines Gramme'schen), Kegel-Schraublinie, etc. (Feldlinie eines Körpers mit Berücks. der Erdrotation). Sonst pflegt man Raum Curven meist als Durchschnitt von Flächen zu betrachten. Umgekehrt kann man sich Flächen durch Bewegung gewisser Curven entstanden denken.

20. Cylinderflächen, ~~welche~~ <sup>parallel bleibend</sup> welche durch Bewegung einer Geraden (Erzeugende) längs best. Curven entstehen

$$r = \varphi(u) + v a$$

$$N = U \nabla a \frac{da}{du}$$

Normale natürlich  $\perp a$ :  $\int a N = \int a U \nabla a \frac{da}{du} = 0$

Dies ist die Differentialgleichung der Fläche,

kann man natürlich auch in Form der analyt. Form. bringen:

$$N = U \nabla F \quad \int a \nabla F = 0$$

$$a_1 \frac{\partial F}{\partial x} + a_2 \frac{\partial F}{\partial y} + a_3 \frac{\partial F}{\partial z} = 0$$

Will man sie integrieren so:  $\int N a = 0$

$$\int N da = 0$$

$$N =$$

Kegelflächen: Gerade, welche immer durch einen Punkt geht, sonst beliebiger

Curven gerichtet

$$r = a + u(\varphi(v) - r)$$



$$N = U \nabla f \frac{\partial f}{\partial v}$$

Daraus folgt:  $N \cdot N = 0$

W. Kreiskegel  $r = v[A(i \cos u + j \sin u) + B k]$

$$N = U \begin{vmatrix} i & j & k \\ A \cos u & A \sin u & B \\ v & v & v \end{vmatrix} = U [A^2 (i \cos u + j \sin u) + k A^2]$$

$$\begin{aligned} r &= i A \cos u + j A \sin u + k B \\ r' &= -i A \sin u + j A \cos u \\ r'' &= -i A \cos u - j A \sin u \\ r''' &= i A \sin u - j A \cos u \\ r^{(4)} &= i A \cos u + j A \sin u \\ r^{(5)} &= -i A \sin u + j A \cos u \\ r^{(6)} &= -i A \cos u - j A \sin u \\ r^{(7)} &= i A \sin u - j A \cos u \\ r^{(8)} &= i A \cos u + j A \sin u \\ r^{(9)} &= -i A \sin u + j A \cos u \\ r^{(10)} &= -i A \cos u - j A \sin u \\ r^{(11)} &= i A \sin u - j A \cos u \\ r^{(12)} &= i A \cos u + j A \sin u \end{aligned}$$

Nachweis, dass  $N$  mit  $k$  konstant  
dass  $N \perp r$

Allgemein: Regelflächen erzeugt durch Bewegung einer Geraden

$$r = \varphi(u) + v \psi(u) \quad \left| \text{Einschaliges Rotations-Hyperboloid} \right.$$

Spezieller Fall: Wenn  $\psi$  erzeugende Gerade immer eine ~~gerade~~ <sup>gebogene</sup> Kurve tangiert  
Dann ist die Fläche ~~der~~ developabel.

Im ersten Fall werden zwei aufeinanderfolgende Geraden windschief sein, man kann nicht eine Fläche durchlegen; hier aber <sup>erhält</sup> ~~sich~~ die Osculationschneure der Kurve immer die aufeinanderfolgenden Tangenten.

$$r = \varphi(u) + v \psi(u)$$

$$N = U \nabla [\varphi'(u) + v \psi'(u)] \varphi(u) = U \nabla \psi' \varphi' \quad \text{also Normale der Fläche}$$

in Richtung der Binormale der <sup>tangenten</sup> Kurve

W. schreibbare Schraubenfläche: durch Tangente an Schraubenlinie

und  $\perp$

"

" Gerade die  $\perp$  " und  $\perp$  ~~Gerade~~ <sup>Gerade</sup>

W. Wendeltreppe ertf

# Rotationsflächen

6  
9  
37

durch Rotation beliebiger Curven um feste Axe,  $z$   
im Allgemeinen nur möglich, wenn Curve eben ist und zwar in Ebene welche die Axe enthält, immer darauf zurückzuführen.

$z = \varphi(u)$  Gleich der Curve

$z =$  ~~Wahl~~ Rotations-Axe (Anfangspunkt hier ein vorlegt)

Ausdrücken, dass ~~Abstand~~ ~~Projektion~~ ~~von~~ einem u Punkt auf Axe constant ~~ist~~

~~Verhältnis~~ Rot zur Projection

$$r_0 = f(\varphi(z))$$

Einmal umgekehrt vorgehen

Differential Gleichung leicht aufzustellen: Normal muss Axe treffen

Wenn Anfangspunkt hier ein vorlegt, so  $N, a, z$  in einer Ebene

$$S N \text{ Var} = 0$$

$$N = u a + v z \quad \left\| \begin{array}{l} \frac{u}{v} = \text{willk. fct} \end{array} \right.$$

$$S N d\varphi = 0$$

$$u S a d\varphi + v S z dr = 0$$

$$u S a r + v S r^2 = f(u, v)$$

$$S r^2 = F(S a r)$$

oder:

$$2 S r dr = F' S a dr$$

$$\cancel{+ v F' = 0}$$

$$S r^2 = f(S a r)$$

$$2 S r dr = f'(S a r) S a dr$$

$$= 2 S r dr - r \cancel{f'(S a r) S a dr}$$

$$\cancel{S r^2 = f(S a r)}$$

$$N = u [a + f'(S a r)] \quad N \perp (r - f'(S a r) a)$$

$$u S a dr + v S r^2 dr = 0 \quad \text{also gilt dies auch}$$

$$S a r = f'(S a r) S a dr$$

=





# Implizite Flächengleichungen.

1/10

Unter  $V$  <sup>Function</sup> ~~ersten~~ Grades von  $x =$  Gerade

Unter  $S$  " " " " = Ebene

" " " zweiter " " = Fläche zweiten Grades

Darauf wollen wir jetzt näher eingehen.

Allgemeinste Form einer ~~Fl.~~ <sup>reellen</sup> Function welche  $x$  nur in zweiter Potenz enthält: wird enthalten, sobald wir uns auf Glieder beschränken welche nur zwei der  $x$   <sub>$S, V$  enthalten</sub>

$$m, S a x, S a V b x =, S x V b x = 0, S a x. S b x, S x^2,$$

Es können auch Glieder mit beliebig vielen  $V$  und  $S$ , also beliebig complicirte auf diese 4 Grundformen zurückgeführt werden

$$2D: S. V a x V b x = S. x V b x = S a x S b x - S b x^2 \\ = S c V b x = -S x V b x = a S b x - x S b$$

besonders mit complicirteren. Der allgem. Beweis kann hier nicht gegeben werden; ist am besten mit Quaternionentheorie zu machen.

$$\text{Also: } m + n S a x + n S x^2 + \sum S a x S b x = 0$$

Dass dies eine Gleichung zweiten Grades ist sieht man ohne weiteres wenn man sich die Summationsformel eingeführt denkt.

Es <sup>beinhaltet</sup> ~~ist~~ diese Form noch vereinfachen: Coord. Transform.  $x = x + h$

$$\left[ m + S c h + n S h^2 + \sum S a h S b h \right] + \left[ S a x + 2 n S a h x + \sum S a h S b x + \sum S a x S b h \right] \\ + \left[ n S x^2 + \sum S a x S b x \right] = 0$$

$F_0$   $F_1$   $F_2$



Es kann jetzt geschrieben werden in Form:

3  
10

~~$$c + \sum a S^i b^i h = 0$$~~

$$c + \sum a S^i b^i h = 0$$

mit

Es nennen wir eine lineare Vectorfunktion von  $h$ , und bezeichnen sie mit  $\phi(h)$ .  
Es handelt sich also darum wir nun welche Struktur auflegt

Kann immer zurückgeführt werden auf 3 Vektoren

$$a S^i b^i h + a' S^{i'} b^{i'} h + a'' S^{i''} b^{i''} h = c$$

$$\phi(h) = c$$

$$h = \phi^{-1}(c)$$

$$S_a V_a$$

$$S_a V_a a'' S^i b^i h = S_a V_a c$$

$$S^i b^i h = \frac{S_a V_a c}{S_a V_a a''} \quad \left| S^i b^i h = \frac{S_a' V_a' c}{S_a V_a a''} \right| S^i b^i h = \frac{S_a'' V_a'' c}{S_a V_a a''}$$

Somit nach Vorhergehendes Satz:

$$\begin{aligned} h &= \frac{V^i b^i S^i b^i h + V^{i'} b^{i'} S^{i'} b^{i'} h + V^{i''} b^{i''} S^{i''} b^{i''} h}{S^i V^i b^i} = \\ &= \frac{V^i b^i \times S_a' V_a' c + V^{i'} b^{i'} \times S_a'' V_a'' c + V^i b^i \times S_a V_a c}{S^i V^i b^i \cdot S_a V_a a''} = \phi^{-1}(c) \end{aligned}$$

Seine Formel ~~ist nicht~~ braucht man selbstständig nicht auswendig zu lernen; sie ist ziemlich kompliziert, aber wenn man die Sache ~~nach~~ in der sonst üblichen Weise rechnen würde wäre sie noch viel komplizierter.

Mit dieser <sup>linearen</sup> Funktion werden wir noch ungefähr viel zu thun haben,  
Jetzt ~~beginnen~~ <sup>beginnen</sup> wir ~~erst~~ <sup>erst</sup> mit diesem Resultat, dass wir wissen, dass man das  $h$  auch immer auflösen könnte, so dass  $F_i = 0$  wird.



4/10

Wir können also die Gleichung der Fläche erster Ordnung schreiben:

$$n \cdot \vec{r} + \sum a_r \cdot \vec{s}_r = -\vec{F}_0$$

$\underbrace{\hspace{10em}}$  konstanter Vektor, zusammengefasst aus den übrigen

$$\begin{aligned} \text{Erste Subs} &= \vec{s}_r [n \cdot \vec{r} + \sum a_r \cdot \vec{s}_r] \\ &= \vec{s}_r [n \cdot \vec{r} + \sum b_r \cdot \vec{s}_r] \end{aligned}$$

Betrachten wir nun den speziellen Fall, so durch diese Transformation nicht nur  $\vec{F}$ , sondern auch  $\vec{F}_0$  verschwindet

Dann sieht man es ohne weiteres:

Wenn ein bestimmtes  $\vec{r}$  die Gleichung genügt so genügt auch  $2\vec{r}, 3\vec{r}, \dots$

Also Gleichung einer Kugelfläche

Allgemeine Form derselben haben wir letztes Mal schon aufgestellt

$$\vec{r} = u \cdot \varphi(v) \quad \text{Explizit}$$

Übung zu zeigen, dass äquivalent

$$\text{Wenn wir einsetzen: } n \cdot \vec{s}_\varphi(v) + \sum a_r \varphi_r \cdot \vec{s}_r \varphi_r = 0$$

$$= \vec{s}_\varphi [n \varphi + \sum a_r \vec{s}_r \varphi] = 0 \quad \text{für jedes } \varphi$$

also muss  $\uparrow = 0$  sein

$$\varphi = \sum f_1(v) + \sum f_2(v) + \sum f_3(v)$$

Wenn man einsetzt, so muss für sich

$$n f_1 + \sum a_r \vec{s}_r f_1 = 0 \quad \text{etc.}$$

3. Satz  $\left\{ \begin{aligned} n f_1 + \sum a_r (h_1 f_1 + h_2 f_2 + h_3 f_3) &= 0 \\ \text{aus dem } f_1 \text{ etc. zu bestimmen} \end{aligned} \right.$

Wir zeigen nun dass die Diff. Body. im spec. Fall der Kugel ist.

Dann hatten wir  $\int N r = 0$

~~$\int r \left[ n \cdot \frac{dr}{dr} + 2a \frac{dr}{dr} + b \frac{dr}{dr} \right] = 0$~~

also

$$\int n r dr + 2 \int a r dr + \int b r dr = 0$$

$$\int \underbrace{\left[ 2nr + 2(a r + b r) \right]}_N dr = 0$$

$\int N r = \int 2nr + 2 \int a r + 2 \int b r = 0$  also stimmt unsere Form tatsächlich immer Gleichg.

Mit Kugel wollen wir uns weiterhin nicht mehr beschäftigen, wir nehmen also

an:  $n r^2 + 2 \int a r + 2 \int b r = 1$  (durch Division durch  $r^2$ )

$$= r^2 \underbrace{\left( n + \frac{2a}{r} + \frac{2b}{r} \right)}_{\phi(r)}$$

Also mit Kugelannahme haben wir  $\int r \phi(r) = 1$   ~~$= \int r \left( n + \frac{2a}{r} + \frac{2b}{r} \right) = 1$~~

Differenzieren:  $\int r \frac{d}{dr} \left( n + \frac{2a}{r} + \frac{2b}{r} \right) = 0$

~~$\int r \frac{d}{dr} \left( n + \frac{2a}{r} + \frac{2b}{r} \right) = 0$~~   
 $\int \underbrace{\left[ \left( n + \frac{2a}{r} + \frac{2b}{r} \right) - \left( n + \frac{2a}{r} + \frac{2b}{r} \right) \right]}_N = 0$

Wir bemerken im Vorhinein dass sich  $\phi$  immer auf eine 3 gliedrige Grundform ausdrücken lässt also

$$\int n \left[ a r^2 + b r + c \right] = 1$$

Also Tangential Ebene Gleichung (s)

$$\int N(r) = 0$$

$$S N_s = S N_r$$

$$\sum S c S b r + S b S c r = 1$$

Hier ist  $r$  gegeben zu denken und  $s$  variabel

Man sieht nun,  $N$  setzt sich zusammen aus

$\phi$  und einer ganz ähnlichen, deren symmetrische Funktion  $\phi'$

Man sieht auch leicht ein, dass

$$S s \phi(r) = S r \phi'(s) \quad \phi' \text{ nennt man conjugiert}$$

und dies die Definitionsgleichung für conjugierte Funktionen

~~Die Tangential Ebene~~ Die Tangential Ebene Gleichung kann jetzt geschrieben werden:

$$S s \phi(r) + S r \phi(s) = 0$$

~~Man sieht~~ Wenn also in der Form geschrieben

$$S s [\sum (c S b r + b S c r)]$$

so sieht man, dass es die Gleichg. einer Ebene ist

Umgekehrt:  $S r [\sum (c S b s + b S c s)] = 1$  auch Gleichg. einer Ebene wobei jeder Punkt, <sup>welcher</sup> der Fläche  $r$  angehört, auch in der Tangential Ebene liegt, die durch  $s$  geht, also Polar Ebene von  $s$

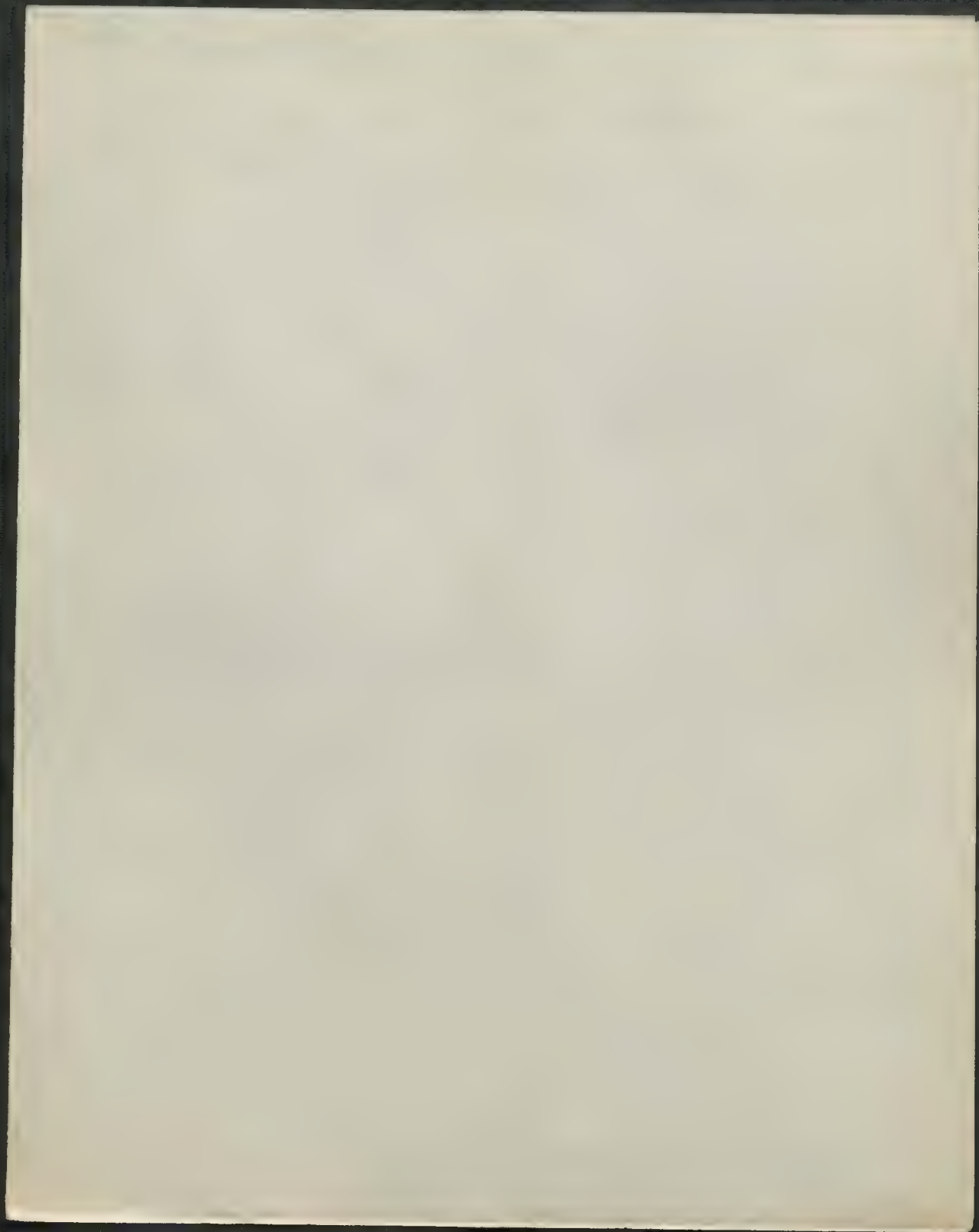
$$\text{Also Richtung der Polar Ebene: } \sum (c S b s + b S c s)$$

bleibt also parallel wenn  $s$  nur Entfernung nicht aber

Richtung ändert; die Richtung von  $s$  nennt man Polare.



Wenn die Länge so klein wird dass der Pol in die Fläche hinein fällt, <sup>7</sup>so ist  
ist die Polarebene gleich der Tangentialebene, entfernt er sich in <sup>10</sup>Erhöhung, so  
geht die Polarebene durch den Mittelpunkt, sie wird zu einer Diametral-  
ebene.



Die Transformation der <sup>ell.</sup> Mty. auf den Nullpunkt hatte uns letztes <sup>1</sup>/<sub>11</sub>  
mal beschäftigt, eine lineare Vektorfunktion aufzulösen

42

~~Es war dies das Gl.  $\mathbb{F}_1$~~

Wir haben versucht, dass eine solche Funktion, welche wir die Kürze wegen  
mit  $\psi(h) = \sum a_{ijk} h^i h^j h^k$  bezeichnen.

und welche allgemein ~~als~~ als eine Summe von beliebigen Vektoren ausdrück  
definiert werden kann, die  $h$  nur in der ersten Potenz enthält,

in ~~der~~ <sup>eine</sup> dreigliedrige Form  $\psi(h) = a_{ijk} h^i h^j h^k + a'_{ijk} h^i h^j h^k + a''_{ijk} h^i h^j h^k$   
gebracht werden kann.

Eine ganz ähnliche, in gewisser Form symmetrische Form wäre

$\psi'(h) = b_{ijk} h^i h^j h^k + b'_{ijk} h^i h^j h^k + b''_{ijk} h^i h^j h^k$   
welche wir die <sup>zu  $\psi$</sup>  <sup>konjugierte</sup> Funktion nennen wollen.

Wir sehen sofort dass

$\int \psi(\mathbf{r}) = \int \mathbf{r} \psi(\mathbf{r})$  und dies kann man ebenso wohl als Definition  
für die konjugierte Funktion nehmen

Diese linearen Vektorfunktion ~~und dem  $\psi$~~  sind in der math.  
Physik von der grössten Wichtigkeit, und ~~das~~ der eigentliche Grund  
warum in der Physik des Ellipsoid eine so große Rolle spielt

(Trägheits Ellipsoid, Wärme Ellipsoid, Deformations Ellipsoid, Druck Ellipsoid,  
Anziehung, etc.) ist, dass es die bequemste <sup>math.</sup> Veranschaulichung für diese  
Vektorfunktion bietet. Auch hier nehmen wir zur Veranschaulichung <sup>math.</sup> Ell. sowohl auch  
für  $n$  gültig



<sup>3</sup>/<sub>11</sub> Diese Abkürzung, wie ich vor großen Vortheil weil sie die Übersichtlichkeit erleichtert; Wir können jetzt die auf der Mittelp. bezogene Ell. Gl. schreiben

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{r} \cdot \mathbf{p}(\mathbf{r}) = 1 \quad \text{oder auch} \quad \int_{\mathcal{C}} \mathbf{r} \cdot \mathbf{q}'(\mathbf{r}) = 1$$

$$2 \int_{\mathcal{C}} (a \mathbf{r} + a' \mathbf{r} + \dots) = 1 \quad 2 \int_{\mathcal{C}} (b \mathbf{r} + b' \mathbf{r} + \dots) = 1$$

Auch die Summe bilden:

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{r} \cdot (\mathbf{q} + \mathbf{q}')(\mathbf{r}) + \int_{\mathcal{C}} \mathbf{r} \cdot \frac{\mathbf{q} - \mathbf{q}'}{2}(\mathbf{r}) = 1 = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{r} \cdot \frac{\mathbf{q} + \mathbf{q}'}{2}(\mathbf{r})$$

$$\sum \int_{\mathcal{C}} (a \mathbf{r} + b \mathbf{r}) \dots = 2$$

dies kann man  $= 2\varphi(\mathbf{r})$  nennen

$$\varphi = \frac{\mathbf{q} + \mathbf{q}'}{2}$$

Es hat die Eigenthümlichkeit, dass  $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{r} \cdot \varphi(\mathbf{r}) = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{r} \cdot \varphi(\mathbf{s})$

man nennt dies selbst conjugirt

und kann sagen: Ellipsoid Gleichung drückt aus, dass das Scalar Product aus der Variable  $\mathbf{r}$  und der eine selbst conj. Function = const ist.

Man kann also immer die <sup>lineare Vekt.</sup> ~~conjugate~~ in der Ellipsoid Gleichg. ersetzen durch eine selbst conjugate.

Nun will ich die Normale und Tangential Ebene finden

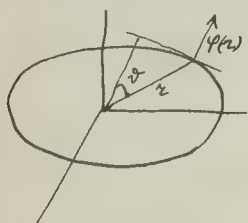
$$\int_{\mathcal{C}} d\mathbf{r} \cdot \sum a \mathbf{r} + \int_{\mathcal{C}} d\mathbf{r} \cdot \sum a' \mathbf{r} = 0 \quad \left\| \quad \int_{\mathcal{C}} d\mathbf{r} \cdot \varphi(\mathbf{r}) + \int_{\mathcal{C}} d\mathbf{r} \cdot \varphi(\mathbf{r}) = 0 \right.$$

$$\int_{\mathcal{C}} d\mathbf{r} \cdot \sum (a \mathbf{r} + b \mathbf{r}) = 0 \quad \left\| \quad \int_{\mathcal{C}} d\mathbf{r} \cdot \varphi(\mathbf{r}) = 0 \right.$$

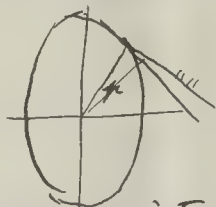
Kette d. Normale Normalvector

$= 2\varphi$

Es haben wir schon eine Kurvendarstellung, des Zusammenhangs zwischen  $x$  und  $\varphi(x)$



Ein anderer ~~Fläche~~ <sup>Fläche</sup> ~~wird~~ <sup>ist</sup>.



ebenfalls Ellipse

"Die Normenfunktion"

ist da in etwas erweitert

Sinngehalt

bezeichnet sich nach Vekt -

von einer Fläche beschreibt, so beschreibt

den anderen auch eine Fläche und die Abhängig-  
keit von einander und Funktion genannt. S. 113

Jetzt kann ich die allg. Gleichg. so integrieren:

~~da~~  $r_0 \cdot \varphi(r) \cdot \cos \vartheta = 1$

$$\varphi_0(r) = \frac{1}{r \cos \vartheta} = (\text{Perpendikel})^{-1}$$

$$\varphi(r) = (\text{Perp.})^{-1} \text{ in Bezug auf Lage und Richtung}$$

Nun ich diese ~~Fläche~~ <sup>Fläche</sup> ~~Funktionspunkte~~ <sup>Funktionspunkte</sup> aufsuche mit dem Stütz.  $p = \varphi(r)$

$$dp = \varphi(dr)$$

$$\int r \varphi(dr) = \int dr \varphi(r) = 0$$

~~Normalen~~

$$\int r dp = 0$$

das sagt aber aus, dass  $dp \perp r$  daher hat die Normale  $\perp r$   
die Richtung von  $r$

Nun nennt man solche Ellipse <sup>oder rechteckig</sup> ~~conjugiert~~ <sup>(Satz von Pappus)</sup> ~~conjugiert~~ <sup>(Theorem über konjugierte Punkte)</sup>  
(Heavis 261, Wolke 1287)

Jetzt Gleichung der Tangentialebene: wenn  $s$  der RV zu einem Punkt der Ebene bedeutet

$$\int (s-r) \varphi(r) = 0 \quad \text{oder explizit} \quad \int (s-r) \sum (a s r + b s r) = 0$$

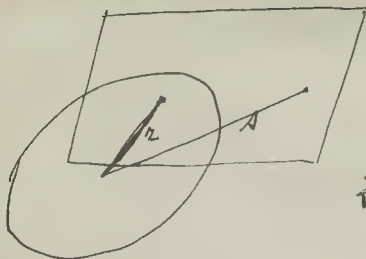
$$\int s \varphi(r) = 1$$

$$\int s \sum (a s r + b s r) = \int r \sum (a s r + b s r)$$

$$2 \int s \varphi(r) = 2$$

$$\int s \varphi(r) = 1$$

(also wieder in Bezug mit  $\varphi$ )



per kann ich die Story auch schreiben

$$\oint_{\gamma} \mathbf{r} \cdot d\mathbf{s} = 1 \quad \left| \quad \frac{1}{2} \oint_{\gamma} \mathbf{r} \cdot (\mathbf{a} \mathbf{s}_b + \mathbf{b} \mathbf{s}_a) = 1 \right.$$

Wenn man da  $s$  als fix auffasst, dann  $r$  variiert, so gibt dies wieder eine Ebene, und zwar sieht man dass, falls  $r$  in die Fläche liegt, dass zugleich auch die Tangente Ebene von  $s$  angehört, also liegen die Tangente Punkte von  $s$  aus in einer Ebene = Polar Ebene und Pol von  $s$  = Polare,  $s$  = Pol.  
Der Kugel unmittelbar ersichtlich



~~Leist man s immer näher an die Fläche her rückt, so kommt auch~~

Wenn man nun verschiedene  $s$  <sup>2s, 3s</sup> nimmt, so werden die entsprechenden Polar-Ebenen

$$\oint \mathbf{r}' \cdot d\mathbf{s}_1 = 1 \quad \quad \quad \oint \mathbf{r}' \cdot d\mathbf{s}_2 = 1$$

$$= \oint \mathbf{r}_1 \cdot d\mathbf{s}_1 = 1 \quad \quad \quad = \oint \mathbf{r}_2 \cdot d\mathbf{s}_2 = 1 \quad \text{etc.}$$

$$\oint \mathbf{r}' \cdot d\mathbf{s}_3 = 1 \quad \quad \quad \oint \mathbf{r}' \cdot d\mathbf{s}_4 = 1$$

$$= 2 \oint \mathbf{r}_1 \cdot d\mathbf{s}_1 \quad \quad \quad = 3 \oint \mathbf{r}_1 \cdot d\mathbf{s}_1 \quad \text{also sämtlich parallel}$$

$\text{denn } \oint \mathbf{r}_1 \cdot d\mathbf{s}_1 = \frac{1}{2}$   $\oint \mathbf{r}_1 \cdot d\mathbf{s}_1 = \frac{1}{3}$

Kommt der Punkt  $s$  in die Fläche hinein, so wird die Polar Ebene eine Tangentialebene, geht er in  $\infty$  Entfernung, so wird



die Gleichg:  $\int \varphi^2 d\omega = 0 = \int \varphi^2 d\omega_1$

5  
11

welcher auch  $r=0$  genügt, d.h. ~~ausgeht~~ dann geht die Polar Ebene durch den Mittelpunkt, wird zur Diametralebene.

Hat man eine solche Polare gewählt, so kann man in der entsprechenden Diametralebene eine zweite wählen, dann ist eine dritte schon bestimmt durch die Schnittgerade dieser beiden Diametralebenen

Oder anders: Man legt durch die Polare eine Schnittebene  
dann ~~am~~ <sup>kann man</sup> an der Schnittkurve Tangente legen die die zweite Polare genügt ist.

Für solche 3 Durchmesser ist noch obg. gilt:

$$\begin{cases} \int d\varphi d\omega = 0 \\ \int d\varphi d\omega' = 0 \\ \int d\varphi' d\omega = 0 \end{cases}$$

3 conjugierte Durchmesser; die Tangentialebene in den Endp. sind  $\parallel$  den beiden anderen; sie halbieren alle Sehnen welche den anderen  $\parallel$  sind

In der ursprüngl. Ellipsoid Gleichg. sind 6 willk. Vektoren

Nur kann sie jetzt <sup>immer auf 3 conj.</sup> ~~aus 6 willk. Vektoren~~ conj. Durchmesser ~~nach auf 3 conj.~~ führen, ~~wobei immer noch der erste willk. bleibt, und bis zu einer gew. Wahl der zweiten~~

Wd.  $\int r (a S b r + a' S b' r + a'' S b'' r) = 1$  oben schon aufgedeutet

~~$N = a S b r + a' S b' r + a'' S b'' r$~~

$\frac{1}{2} \int r [(a S b r + b S a r) + (a' S b' r + b' S a' r) + (a'' S b'' r + b'' S a'' r)] = 1$

$= \frac{1}{2} \int r [(a+b) S (a+b) r + \dots + (a-b) S (a-b) r + \dots]$

8/11  
Dann kommt die Gldg. auf 3 Verten zurück:

~~$$\int_{\mathbb{R}} [a f_{ar} + a' f_{a'r} + a'' f_{a''r}] = 1$$~~

Wollen jetzt nicht näher darauf eingehen, wie diese Verten aus den anderen sich bestimmen lassen, sondern beschränken uns erzeigen, dass die Richtungen  $a, a', a''$  conj. sind.

Wenn: Wenn  $r = \sqrt{a^2 + a'^2 + a''^2}$

~~$$f = a f_{ar} + a' f_{a'r} + a'' f_{a''r}$$~~

~~so sind Normale  $N = a f_{ar} + a' f_{a'r} + a'' f_{a''r}$~~

~~$$\perp a' a'' = \sqrt{a^2 + a'^2 + a''^2}$$~~

~~$$\sqrt{N} \sqrt{a' a''} = a' \int N a'' - a'' \int N a' = \sqrt{a^2 + a'^2 + a''^2} \sqrt{a' a''}$$~~

~~$$= a' \int a a'' f_{ar} + a' a'' \int f_{ar} + \int a^2 f_{ar}$$~~

~~$$- a''$$~~

Wenn  $a = \sqrt{a'^2 + a''^2}$  f. g. ist, so  $N = a'' \int a'' \sqrt{a' a''}$

~~$$r = \sqrt{a'^2 + a''^2}$$~~

~~$$N = a \int \dots$$~~

~~$$r = \sqrt{a'^2 + a''^2}$$~~

~~$$N = a' \int \dots$$~~

Wenn  $\int a \varphi(a)$  gebildet wird so ist dies =

~~$$\int a' f_{ar} + \int a'' f_{a'r} + \int a'' f_{a''r}$$~~

~~$$\int \sqrt{a' a''} \varphi(\sqrt{a' a''}) = \int \sqrt{a' a''} [a f_{ar} \sqrt{a' a''} + a' f_{a'r} \sqrt{a' a''} + a'' f_{a''r} \sqrt{a' a''}]$$~~

~~$$= \int V.$$~~

Somit können wir die Sk-ly der M transf.

7/11

4.5

$$\int d\varphi d = 0 = \int d'\varphi d \quad \int d\varphi d = 1$$

$$\int d'\varphi d' = 0 = \int d''\varphi d' \quad \int d'\varphi d' = 1$$

$$\int d''\varphi d = 0 = \int d\varphi d'' \quad \int d''\varphi d'' = 1$$

$$z = \frac{x}{d_0} d + \frac{y}{d'_0} d' + \frac{z}{d''_0} d''$$

$$\int z \varphi z = \int \left( \frac{x}{d_0} d + \frac{y}{d'_0} d' + \frac{z}{d''_0} d'' \right) \left( \frac{x}{d_0} \varphi d + \frac{y}{d'_0} \varphi d' + \frac{z}{d''_0} \varphi d'' \right)$$

$$= \frac{x^2}{d_0^2} + \frac{y^2}{d'^2_0} + \frac{z^2}{d''^2_0} = 1 = \int d\varphi d \quad \int d'\varphi d'$$

$$x = \frac{z}{d} \quad \frac{z^2}{d^2} + \frac{y^2}{d'^2_0} + \frac{z^2}{d''^2_0} = 1$$

$$\varphi = \frac{d}{d_0} \int d\varphi d + \frac{d'}{d'_0} \int d'\varphi d' + \frac{d''}{d''_0} \int d''\varphi d''$$

allg. Sk-ly. bezogen auf eingetragte Durchmesser.

gewöhnlich Sk-ly. bezogen auf eingetragte Durchmesser.

Ist Aufgabe die Max. Min. von  $z$  zu finden

$$dT^2_z = dS^2_z = 0 = 2S_z dz = 0$$

Das heißt wohl wie: Radius hat das grösste und kleinste  $z$  wo die Tangentialebene  $\perp$  darauf steht, also wo Normale mit  $z$  zusammenfällt.

Es entsteht also die Aufgabe diese Richtung zu finden.

Diese führt auf die berücksichtigte elliptische Sk-ly mit den 3 Hauptachsen als Wurzeln. Wir werden uns dafür nicht weiter interessieren sondern nur zeigen 1) dass 3 Richtg.  $\perp$  aufeinander stehen.

Wenn eine solche Richtg. bekannt ist, so weißt man die entsprechende Ebenen. Diese hat wenigstens 1 Richtg. gibt also nur zwei



können also in die Richtung von  $i, j, k$  hinein liegen

8  
11

$$d = i m_1$$

$$d' = j m_2$$

$$d'' = k m_3 \quad \text{also: } \varphi = m_1 i S_{12} + m_2 j S_{12} + m_3 k S_{12}$$

$$\text{Somit: } m_1 (S_{12})^2 + m_2 (S_{12})^2 + m_3 (S_{12})^2 = 1$$

Jetzt können wir beweisen, dass es andere Richtungen nicht mehr gibt

so  $\sum V_{12} S_{12} = 0$  falls  $m_1, m_2, m_3$  verschieden sind.

wollte man sie bestimmen, so wäre dies nicht möglich:

$$\begin{aligned} \sum V_{12} S_{12} &= m_1 x (m_2 k y - m_2 f z) + \frac{m_2 y (m_3 i z - m_1 k x) + m_3 z (m_1 j x - m_2 j y)}{m_2 y (m_3 i z - m_1 k x) + m_3 z (m_1 j x - m_2 j y)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

In der letzten Zeit haben wir Stellungswegpunkt vorausgesetzt, dass  $\varphi$  konstant positiv oder negativ ist, offenbar ist dies nicht richtig; können auch  $\varphi$  negativ sein.

$$\varphi = m_1 i S_{12} + m_2 j S_{12} + m_3 k S_{12} \quad \text{Ellipsoid}$$

wenn  $f \sqrt{-1}$  statt  $f$  so wird  $j k$  imaginär = einschelliges Hyperboloid

$j \sqrt{-1}$  und  $k \sqrt{-1}$  imaginär " = zweifach " "

alle drei können nicht neg. werden, weil  $\varphi$  auf der rechten Seite positiv ist.

Beispiele: Ausrechnen Rotationshyperboloid durch Rotation einer

Gerade um Rot. Achse.

Nachträge zu pag 71:

~~Andererseits~~

Also wenn man 3 conj. Durchmesser kennt, so kann man immer die Gleichung darauf transformieren, so dass sie die Form bekommt:

$$\varphi = d \int dr + d' \int d'r + d'' \int d''r$$

Andererseits leicht zu zeigen dass wenn

— — — — —

---

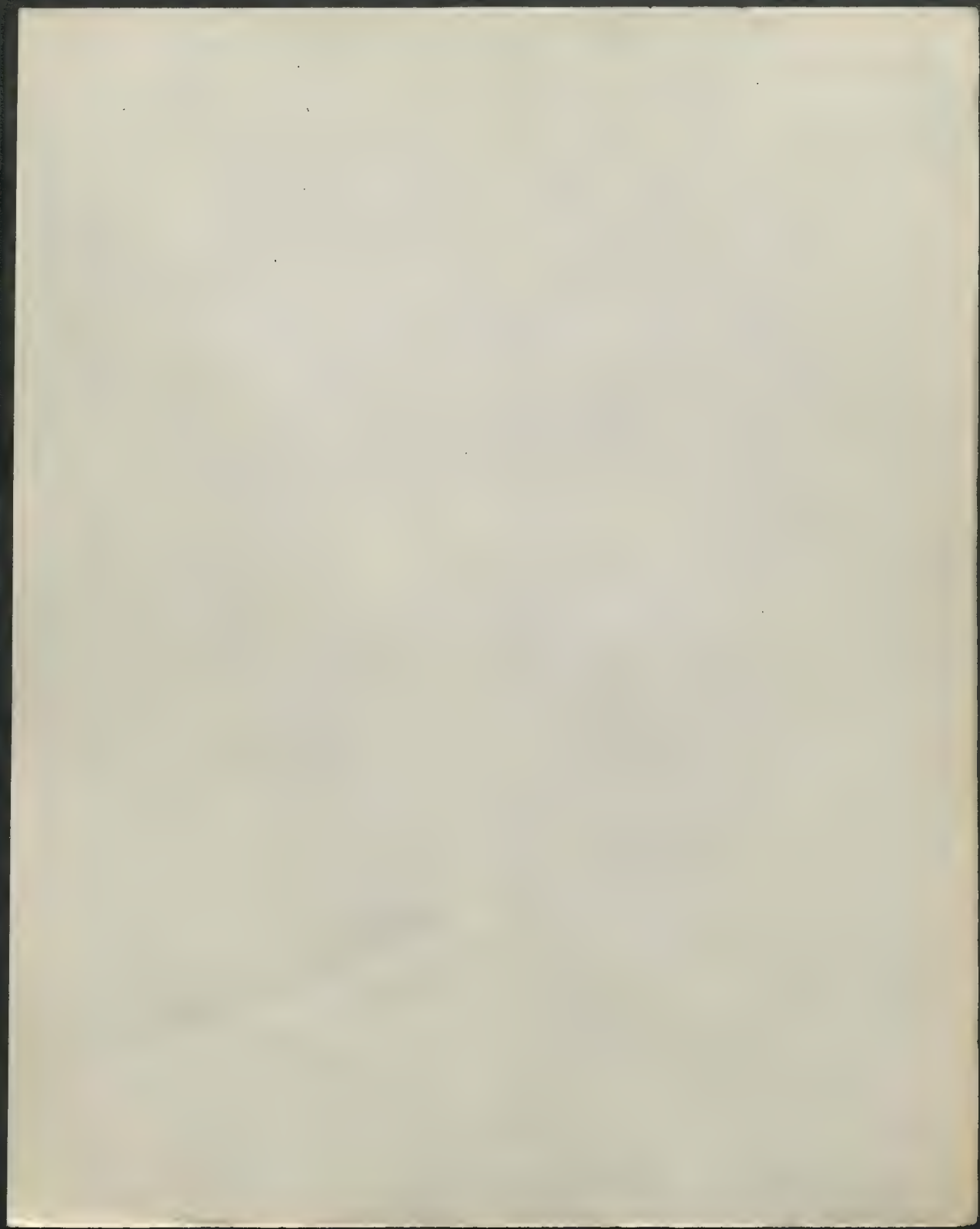
Jede selbstconj. Punkt kann also in die Form gebracht werden:

$$\varphi = m, i \int r + \dots$$

Das heisst aber nichts anderes, als dass die conj.  $F_1$  in einer Ausdehnung des Arguments in 3  $\perp$  Richtungen besteht. Also wenn man sich vor eine Kugel <sup>in einer</sup> ~~der~~ Gelatümmasse ~~es~~ vorstellt denkt, so wird diese dadurch in ein Ellipsoid verwandelt und die Zusammenhänge werden so wie correspondirenden Punkten wird <sup>mit</sup> ~~durch~~  $\varphi$  bezeichnet. Dies ist also eine andere Vorstellunglich von  $\varphi$ , welche wir noch viel anwenden werden. (Elastizitätstheorie etc.).

---

Exkurs über Krümmung von Flächen.





# Physikalische Anwendungen.

17

Nur werden da nicht in der sonst üblichen Reihenfolge vorgehen, sondern ist die spezielle Mechanik starrer Körper für den Schluss lassen, da wir dort die eigentl. Potentiale anwenden können. Dagegen Electr., Hydrod., Elastiz. aufpassen vornehmen. Nur kurze mechanische Vorbereitg. bezüglich der Grundbegriffe.

Mechanik des freien Punktes.

Statik:  $\sum f = 0$

Wenn geradlinig auf Flächen oder Curven zu verbleiben

$\sum f N = 0$

↑ Flächen Normale

$\int \sum f \frac{dr}{ds} = 0$

↑ Tangente der Curve

Natürlich auch aufpassen als Stütz eine Ebene in welcher  $f$  liegen kann, ohne Druck u.s.g.

## Dynamik

$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \sum f$  Zusammensetzung der Kräfte selbstverständlich falls man einmal anerkennt, dass die Kraft als Vector zu behandeln ist.

Natürlich kann dies auch in die Form der Statik zurückgebracht werden

$\sum f - m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = 0$  wobei also <sup>dann</sup> zu den sonst wirkenden äußeren Kräfte noch  $m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$  als „Trägheitskraft“ hinzugefügt werden muss

Dies  $m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$  kann zerlegt werden wie schon früher gesagt wurde

$= m \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 \frac{1}{R} + m \frac{d^2 s}{dt^2} \frac{ds}{ds}$  in Componente längs der Bahn und ⊥ dazu (Centrifugalkraft)

Operiert man auf obige Gleichung mit  $\int \frac{dr}{dt}$

So erhält man

$$\frac{m}{2} \int \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 = \int dr \sum f = \underbrace{\sum \int f dr}_{\text{man integriert die Kräfte}} + \text{const}$$

Also Unterschied der LK = der desirierten geleistete Arbeit

$$\frac{m}{2} \int_1^2 \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 = \sum \int_1^2 f dr$$

wenn f eine lokale Funktion der Zeit ist und

oder auch (wenn sich die Integration ausführen lässt)  $\int f dr = -P$

$$\frac{m}{2} \int \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + P = \text{const}$$

Summe aus aktueller und potentieller Energie = const.

$\frac{1}{13}$  Wenn wir Centralkräfte haben: Dann Kraft immer nach dem Aufgspunkt hin:

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -U(r) \frac{\vec{r}}{r}$$

E. Daher wird eben, dass dann

~~$$V \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -U(r) \frac{\vec{r}}{r}$$~~

~~$$V \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \cdot \vec{r} = 0$$~~

$$V \frac{dr}{dt} \cdot \vec{r} = \text{const} = \frac{1}{2} \epsilon$$

Nun differenzial folgen dann auch

$$\frac{d}{dt} V r \cdot \vec{r} = V r \frac{dr}{dt} + V \frac{dr}{dt} r = 0$$

$$\text{also nicht } V r \frac{dr}{dt} = \frac{1}{2} \epsilon V r^2$$

$$\frac{d}{dt} V r \frac{dr}{dt} = V \frac{dr}{dt} \frac{dr}{dt} + V r \frac{d^2 r}{dt^2}$$

Das heißt:

- 1). Richtung  $\perp$  Geschw. & Rad. = const. also Drehbew. const.
- 2). Flächengeschwindigkeit auch der Geschw. const.  $\frac{1}{2} \vec{r} \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{1}{2} \left( \vec{r} \frac{dr}{dt} - r \frac{d\theta}{dt} \right)$   
ganz unabhängig von P (könnte auch von Geschw. selbst abhängen).





3/13

$$\int_a^r V_{ic} = \int_a^r V_{ri} = \int_a^r \ddot{c} r = \ddot{c} r + k \int_a^r U(r)$$

$$\ddot{c} r^2 = \ddot{c} r + k T(r)$$

Daraus sehen wir schon dass  $r$  nur einer Fläche weiter folgen muss,

denn wenn wir bilden  $k(T(r))$  so ist dies gleich einer 2 - -

$$k^2 \ddot{c} r^2 = [\ddot{c} r^2 - \ddot{c} r]^2 \quad \text{also eine in } r \text{ quadratische Gleichung}$$

weil denn  $r$  ausserdem in der Ebene  $\perp a$  liegen muss, sieht man ohne weiteres

dass es Ellipsen, Hyper., sein muss.

Unmittelbar aus obiger Gleichung ersichtlich, wenn im gewöhnl. ~~absolut~~ <sup>absolut</sup> ~~conv.~~ <sup>conv.</sup> umgeschrieben

$$c_0^2 = a_0 r_0 \cos \varphi + k r_0$$

$$r_0 = \frac{c_0^2}{k + a_0 \cos \varphi} = \frac{c_0^2}{k} \frac{1}{1 + \frac{a_0}{k} \cos \varphi}$$

bekannte Polargleichung der Ellipse, wenn  $\frac{a_0}{k} < 1$

$\frac{a_0}{k} =$  Excentricität Vollständig ist die Lösung noch nicht. Hyperbel -  $> 1$   
Kepler's Problem wird dadurch endlich nicht erledigt.

Diese Rechnungen welche mit reibendw. Cartesisch Coordinaten ungenau laugungs sind, gehen da also sehr leicht. Allerdings macht die Methode den Eindruck von bloßen Kunstgriffen, doch ist dies auch bei der gewöhnl. Art der Fall

In den Fällen (erste und dritte Potenz) sind in Text Buch behandelt

Ellipsen mit

Sperre

In den Fällen kann man sich schon ohne integriren v. Bernoulli's  $\frac{1}{x^2}$

Sonne im Centrum  
Angewandt auf Newton sind natürlich die jetzt bes. mit Newton's  
möglich; Newton: Winkelbeschleunigung  $\frac{\pi}{h^2+3}$  wenn  $\mu$  pro  $x^n$   
Notizen

führt auf elliptische Funktionen

Bisher nur Mechanik von Punkten, Statik  
kann zusammengefasst werden in Satz, dass bei jeder virtuellen Verschiebung  
d.h. einer unendlich kleinen ~~solchen~~ Verschiebung, welche bei den starren  
Verbindungen sta. möglich ist, Arbeit = 0 ist.  $\sum f \delta r = 0$

~~Statik~~ ~~in~~ Dynamik daraus abgeleitet durch d'Alembert'sches  
Prinzip  $\sum \left( f - m \frac{d^2 r}{dt^2} \right) \delta r = 0$

gilt nicht nur für Punkte, sondern für ganz beliebig komplizierte Systeme  
in Form  $\sum \left( f - m \frac{d^2 r}{dt^2} \right) \delta r = 0$

~~Wir betrachten nur einen Fall: starrer Körper~~

Dies umfasst auch die Bewegung, wo Punkte gezwungen sind, auf  
Flächen oder Curven zu bleiben; ~~Satz~~ denn ist die Art dieses Zwangs  
in  $\delta r$  ausgedrückt

so wie wir letzthin für Statik abgeleitet haben, wenn Punkt auf  
Curve  $r$  bleiben muss:

$$\delta r = \underbrace{\frac{dr}{ds}}_{f(s)} \delta s \quad \sum \left( f - m \frac{d^2 r}{dt^2} \right) \delta s = 0$$

$$\sum \left( f - m \frac{d^2 r}{dt^2} \right) \frac{dr}{ds} \delta s = 0$$

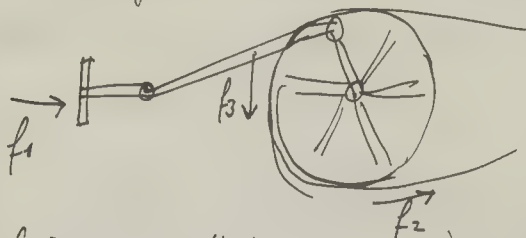
wenn auf Fläche, so  $\delta r \perp N$   $\delta r = V N \cdot \delta s$

$$\sum f V N \delta s = 0 = \sum \delta s V f N = 0$$

$$V f N = 0$$

$\frac{5}{13}$  Wenn Kräfte auf verschiedenen Punkten wirken, so müssen die betref-  
fend  $\delta r$  in der Summe eingeführt werden

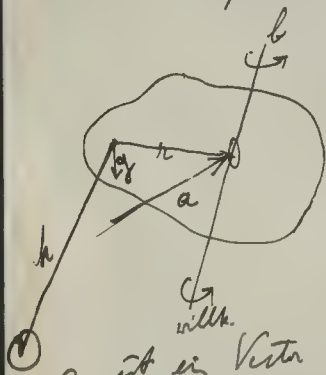
o. Newton



$\sum (f_1 \delta r_1 + f_2 \delta r_2 + f_3 \delta r_3 - m \frac{d^2 u}{dt^2}) = 0$  In diesem Falle sind  $\delta r_1, \delta r_2, \delta r_3$  durch  
~~ein~~ ein einziges  $\delta s$  ausdrückbar; der Factor muss dann  $= 0$  sein.

Wir beschränken uns auf Bewegung eines starren Körpers; denn sind  
die  $\delta r$  auf einfache Weise miteinander verbunden  
Um dies zu finden, betrachten wir die Bewegung eines Punktes eines  
starken Körpers.

Wenn  $\omega = 0$ :  $b =$  Lage der momentanen Drehachse  
 $g = V \omega b$ , das gilt natürlich für jede Lage von  
(auch unbefestigt)



sonst  
 $\frac{d\mathbf{h}}{dt} = \mathbf{g} = \mathbf{a} + V \omega \mathbf{b}$  // also auch  $d\mathbf{h} = d\mathbf{a} + V \omega d\mathbf{b}$   
 $\mathbf{a}$  ist ein Vektor mit 3 willk. Richt., ebenso  $\mathbf{b}$ , daher im Sinne 6 Freiheitsgrade  
Setzt man dieses ein in

$$\sum \left( f - m \frac{d^2 u}{dt^2} \right) [d\mathbf{a} + V \omega d\mathbf{b}] = 0$$

die  $\sum$  wird = über das ganze Volumen



Einzeichnen auf pag 5  
13

Zusammensetzung verschiedener Drehg.

$$V_2 b + V_2 b' + \dots = V_2 (b + b' + \dots)$$

Wird dann per d'ne  
durchgeführt

$a$  kann zerlegt werden in Comp. in R. d.  $t$  und  $\perp$  dazu  
 $= a'$   $a''$

$a'' + V_2 b$  kann aber aufgefasst werden als bloße Rotation ~~und~~

da  $a'' = V_2 b a''$

$a'' + V_2 b = V_2 (a'' + b)$  also Rotation um eine ~~der~~ geradlin. Achse

daher brauchen wir bloß die Drehg.  $g = a' + V_2 b$   
zu betrachten, wo  $a'$  in R. d.  $t$ , also Schraubenbeweg.

Momentenaxe

$$\int T_{rel} dv = \int T_{rel} \frac{dh}{dm} dv$$

Wenn  $\gamma = 1$  = Drehung, kommt da Kräfte

$$m = 0:$$

$$\int T_{rel} \frac{dh}{dm} ds = \text{const} = \gamma$$

$$\frac{dh}{dt} = a + V_{rel} b$$

$$\int m (V_{rel} + V_2 V_{rel}) ds = \gamma$$

$$\int m ds V_2 V_{rel} = \gamma$$

$$\begin{aligned} S_{\gamma} &= \int m ds \sqrt{V_2 V_{rel}} \\ &= \int m ds V_{rel} \\ S_{\gamma} &= S(V_{rel})^2 \end{aligned}$$

Kittelini

$$f = \frac{d\sigma}{ds}$$

$$X = \frac{d(T \cos \alpha)}{ds}$$

iter.

$$g = \frac{d(T \sin \alpha)}{ds} = c \frac{d(\sin \alpha)}{ds}$$

$$0 = \frac{dT \cos \alpha}{ds} \quad T \sin \alpha = c$$

$$g \frac{ds}{dx} = c \frac{dy}{dx} = g \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

$$y = e^{\alpha x} + e^{-\alpha x}$$

$$y' = 2 \alpha e^{\alpha x}$$

$$g_0 = c \frac{dy}{dx}$$

$$g \sqrt{1 + y'^2} dx = c dx$$

$$g x = \frac{c dx}{\sqrt{1 + y'^2}} = 2y (2 + \sqrt{1 + y'^2})$$

$$\int \vec{S} d\vec{a} \cdot \left( \vec{f} - m \frac{d^2 \vec{h}}{dt^2} \right) + \int \left( \vec{f} - m \frac{d^2 \vec{h}}{dt^2} \right) \cdot \vec{r} d\vec{h} = 0$$

6  
13

Da ist willk., daher muss  $\int \left( \vec{f} - m \frac{d^2 \vec{h}}{dt^2} \right) d\vec{h} = 0$

51

$$\text{also } \int \vec{f} d\vec{h} = \int m \frac{d^2 \vec{h}}{dt^2} d\vec{h} \quad \frac{d^2 \vec{h}}{dt^2} = \frac{d^2 \vec{a}}{dt^2} + \vec{V}_r \frac{d\vec{h}}{dt}$$

$$= \frac{d\vec{a}}{dt} \int m d\vec{h} + \vec{V}_r \frac{d\vec{h}}{dt} \int m r d\vec{h}$$

Wenn man nun den Punkt 0 im Schwerpunkt summiert, so verschwindet  $\int m r d\vec{h} = 0$

$$\text{also dann } \int \vec{f} d\vec{h} = \frac{d\vec{a}}{dt} \int m d\vec{h} = \frac{d^2 \vec{a}}{dt^2} M \quad \text{also so als ob alle Kräfte in Schwerpunkt vereinigt wären}$$

Bei dieser Gelegenheit können wir also auf den Schwerpunkt zu sprechen

Definition  $M \vec{s} = \int m \vec{r} d\vec{h}$

( $\vec{s}$  = Abstand zw. Schwerpunkt und h)

Woraus folgt  $M s_1 = \int m x d\vec{h}$

$$M s_2 = \int m y d\vec{h}$$

$$M s_3 = \int m z d\vec{h}$$

Dann bleibt

$$\int \vec{V}_r d\vec{h} \cdot \left( \vec{f} - m \frac{d^2 \vec{h}}{dt^2} \right) = 0 = \int \vec{V}_r d\vec{h} \cdot \left( \vec{f} - m \frac{d^2 \vec{h}}{dt^2} \right) d\vec{h}$$

$$\int \vec{V}_r \vec{f} d\vec{h} = \int \vec{V}_r \int m \frac{d^2 \vec{h}}{dt^2} d\vec{h}$$

$$= \vec{V}_r \int m \left( \frac{d\vec{a}}{dt} + \vec{V}_r \frac{d\vec{h}}{dt} \right) d\vec{h} = \vec{V}_r \frac{d\vec{a}}{dt} \int m d\vec{h} + \vec{V}_r \frac{d\vec{h}}{dt} \int m r d\vec{h}$$



$$F_3 = V \frac{da}{dt} \int r^2 dr + \int V f r m V r \frac{db}{dt} dr$$

$= 0$  wenn schwach.

$$= \int m dr \underbrace{f V r V r \frac{db}{dt}}_{= r \int r \frac{db}{dt} - \frac{db}{dt} \int r^2}$$

$r r_0^{\text{th}} \omega(r, t) \text{ th}$

~~$$\int r^2 \omega(r, t) dr$$~~
~~$$\int r^2 \omega(r, t) dr$$~~

$$\rho^2 \Phi = \rho \beta [S r^2 \cdot S \beta^2 - (S r \beta)^2] + (S r \beta) [\beta S r \beta - r S \beta^2]$$

~~$$or S r^2 \cdot S r^2 \cdot V r V r$$~~
~~$$V r V r \cdot or S r^2 -$$~~

$$= V \beta V r \beta$$

$" \perp \beta$

$$\frac{S r^2 S \beta^2 - (S r \beta)^2}{\rho^2} = K.$$

$$" I (V r \beta)^2$$

$$\rho^2 \beta^2 r^2$$

Lk:

$$\int dm \left[ \frac{da}{dt} + V r \beta \right]^2 = \int dm v_0^2 + 2 \int dm S v_0 V r \beta + \int dm (V r \beta)^2$$

$K$

$$\oint S v_0 V r dm \beta$$

"0 jüni nicht erhalten"

Nur kommen jetzt in dem physikalisch ~~am~~ wichtigsten Theil:

$\frac{1}{14}$

52

Betrachtung der physikalischen Felder mit Anwendung der diesbezüglichen Differentialoperationen,

Eigentlich kann man den größten Theil des Stoffes, ~~der~~ <sup>der</sup> in den Lehrbüchern der mathem. Physik <sup>behandelt wird</sup> subsumieren v. d. ganzen Potentialtheorie, fast die ganze Hydromechanik, Electrostatik etc. Eigentlich kann man es aber nicht als Physik auffassen, da diese Betrachtungen sämmtlich ganz davon unabhängig sind, was für physikalische oder auch geometr. Größen man sich dabei unter den Vektoren etc. versteht, sondern eher als einen Theil der Geometrie, allerdings in einem weiteren Sinne, da darin außer den drei Raum Coordinaten aber noch ein vierter Vektor vorkommt, welcher an jeder Stelle des Raumes einen bestimmten Wert hat. Folgt ~~man~~ <sup>hat</sup> desshalb auch seinem Orte, welches die Theorie behandelt, den Titel: „Geometrie der Vektorfelder“ gegeben; Eigentlich schon zu spezieller Name, Geometrie der physikalischen Felder wäre vorzuziehen. Was unter einem physikalischen Feld gemeint ist, wird aus speziellen Bezügen klar: magnetisches, electrostatisches Feld. Jedem Punkt des Raumes ein Wert eines bestimmten Vektor- oder ScalargröÙe zugeordnet, welche sich im Allgemeinen stetig aneinander anschließen. Nur ausnahmsweise können Unstetigkeiten der GröÙe oder Lücke eintreten.

zunächst wollen wir die Diff. ops selbst kennen lernen  
Skalar Felder.

W. Gravitations Potential, Electrostat. Pot., Magnet. Potential,  
Electron. Pot., (vielleicht <sup>versteht</sup>), Hydrod. Druck-Potential, Temperaturfeld,  
~~Sättigung~~ Concentrationsfeld von Lösungen u. sehr in Wasser (4)

Den wichtigsten Operator, welcher hierbei fortwährend gebraucht wird,  
haben wir schon einmal kennen gelernt. Es war das Hamilton  $\nabla$   
(Kommutator Netto, ~~Vek~~, Triangle, verkehrt  $\nabla$ )

Nehmen wir u. B. Temperatur Verteilung  $V = f(x, y, z)$

<sup>Isobaren</sup> Äquipotentialflächen mit denen gehen durch  $V = \text{const.}$  (das war die Skalarform der Flächenungleichung)

Wir haben schon früher gefunden, dass dann die Richtung

der Normalen gehen ist durch  $N = U(\nabla V)$

$$\text{wo } \nabla = i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z}$$

die absolute GröÙe von  $\nabla$ , also  $I(\nabla V)$  wird dann die Änderungsgeschwindigkeit  
von  $V$  in dieser Richtung der Normalen anzeigen.

$\nabla V$  ist also ein Vector, welcher die ~~Richtung~~ und Änderungsrate in der Richtung  
des größten Abfalls misst. (Nimm: Slope) Das folgt ja auch unmittelbar aus dem

obigen Ausdruck, da dann  $\frac{\partial V}{\partial x}$  etc. die Komponenten der Änderungsraten

werden; die absolute Änderungsrate ist dann  $\sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2}$ .

Aus dieser Bedeutung folgt unmittelbar dass  $\nabla V$  unabhängig vom Wert der Lage  
von  $i, j, k$ .

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial V}{\partial x} + \dots \right)$$

$\frac{\partial U}{\partial x}$  kann hier  $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$  sein ]



Wenn wir W. Wärmefluss betrachten

Wärmefluss <sup>Strömung</sup>  $h = \kappa \nabla T$

In Mechanik: Kraft  $f = \nabla P$  wenn  $P = \text{Potential}$

Das ~~kennt~~ <sup>stimmt</sup> natürlich mit Cart. vollen überein  $x = \frac{\partial P}{\partial x}$  etc.

Die Umkehrung dieser Quotient ist das Linienintegral

$$P = C + \int S f ds = \int [S f_1 ds_1 + S f_2 ds_2 + \dots] \quad \text{wobei wir beachten, dass}$$

$f$  und  $s$  in Abh. nicht fix gemacht sind

Ein anderer Quotient welcher auf Scharfunktion angewendet werden kann:

~~$$\nabla \cdot \nabla = \Delta$$~~ 
$$(\nabla a) \cdot \nabla = \left( a_1 \frac{\partial}{\partial x} + a_2 \frac{\partial}{\partial y} + a_3 \frac{\partial}{\partial z} \right) \nabla$$

Das bedeutet also den Unterschied zwischen den Werten von  $\nabla$  im Anfangs und Endpunkte von  $a$ , falls  $a$  unendlich klein ist, also wie man kurz sagen kann: den Differentialquotienten von  $\nabla$  in die Richtg von  $a$

$$= a_0 \frac{d\nabla}{ds} \quad \text{wenn } ds \text{ die Richtg von } a \text{ hat}$$

Aus der Formel, ebenso wie aus der Anschauung folgt natürlich, dass

$$(\nabla a) \cdot \nabla = \nabla(a \cdot \nabla) \quad \text{dass gilt aber nur für solche } \nabla \text{ funktion für}$$

Vektorfunktionen, wie wird die Sache viel complicierter und dann ~~bekannt~~ <sup>wird</sup> eigentlich  $\nabla a$  ist von praktischer Wichtigkeit.

Hier bedeutet also W. von  $a = \text{Erhöhter Punkt}$ :  $(\nabla a) P = \text{Kraft}$

# Vektorfelder

Nehmen wir zunächst das dem letzten Quater von  
 $(\mathcal{L} \nabla)$  kann man natürlich nicht direkt auf ein Vektor anwenden von dem  
 man es her hat  ~~$\nabla \nabla$  oder  $\nabla \nabla$~~

Es kann ebenso gut auf Vektoren wie auf Skalar angewandt werden  
 und hat denselben Bedeutung  $\nabla$ : wenn  $c = \text{Skalar}$  in einer Flüssigkeit  
 hängt bedeutet mit Komponenten  $c = \begin{cases} c_1 = u \\ c_2 = v \\ c_3 = w \end{cases}$

$$(\mathcal{L} \nabla) c = i \left( a_1 \frac{\partial c}{\partial x} + a_2 \frac{\partial c}{\partial y} + a_3 \frac{\partial c}{\partial z} \right)$$

$$+ j \left( a_1 \frac{\partial c}{\partial x} + \dots \right)$$

$$+ k \left( \dots \right) \text{ Differentialquotient}$$

Es gibt also die Komponenten die ~~Unterschiede~~ ~~den~~ ~~von~~ ~~den~~ ~~Ergebnisse~~  
~~unterschied~~ von  $a$  an, also in einem Punkt kann man auch dies wieder auffassen als  
 Differentialquotient nach Richtung von  $a$ ; natürlich gibt vorher den Unterschied  
 dass es wieder eine Vektorgröße wird mit 3 Comp.

Ein Fall der sehr häufig vorkommt ist dass  $a$  eine Geschwindigkeit  
 bedeutet.  $\nabla$ . Bei einem skalaren Funktion Wärmeleitung in einer  
 bewegten Flüssigkeit. Es interessiert uns die Temperaturzunahme ~~der~~  
 Flüssigkeit an bestimmten Stelle  $\frac{dT}{dt}$  oder also die Temperaturzunahme  
 einer sich weiter bewegenden Flüssigkeitsportion  $\frac{dT}{dt} + (\mathcal{L} \nabla) T$

Ebenso bei Vektorfunktionen

man kann man offenbar  $\nabla$  nicht unmittelbar auf Vektoren anwenden,  
 sondern nur entweder  $\nabla \cdot \vec{v}$  oder  $\nabla \times \vec{v}$ .

Dafür eigene Namen, da sie so häufig vorkommen und eine eigene Bedeutung  
 haben:  $\nabla \cdot \vec{v}$  = Divergenz (- Konvergenz bei Maxwell!),  $\nabla \times \vec{v}$  = curl (Maxwell)  
 Rotation (Weinstein)  
 spin

$$\nabla \cdot \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

Bedeutung davon wird gleich klar, wenn man an Hydrodynamik denkt:

$$\nabla \cdot \vec{c} = \frac{\partial c_x}{\partial x} + \frac{\partial c_y}{\partial y} + \frac{\partial c_z}{\partial z}$$

Bekannter Ausdruck aus der Kontinuitätsgleichung:  
 (Abhängigkeit von Koordinaten)



$$dy dz \left[ \left( c_x + \frac{\partial c_x}{\partial x} dx \right) - c_x \right] + dx dz \cdot \frac{\partial c_y}{\partial y} dy + \frac{\partial c_z}{\partial z} dz$$

Überschuss des <sup>außen</sup> ausströmenden des Masse in ein Volumenelement  
 die einseitig einströmende. Natürlich falls unverschobene Fließzeit,

muss dies ~~notwendig~~ = 0 sein ;  $\nabla \cdot \vec{c} = 0$  charakterisiert Kontinuitätsgleichung  
 in Gasen nicht notwendig durch. // Wenn man sich Gas in einem Vd. vorstellt  
 ist die Dichte konstant

Wärmerichtung  
~~Elektrizitätsleitung~~ // wenn  $\vec{a}$  einen Wärmerichtung bedeutet  
 pro Volumenelement  
 ist  $\nabla \cdot \vec{a}$  = Überschuss der weggehenden Wärmerichtung, dann muss

in der die Temperatur sich erniedrigen ; wenn  $C$  = spez. Wärme

$$C \frac{dT}{dt} = - \nabla \cdot \vec{a} \quad \text{also} \quad C \frac{dT}{dt} = - \nabla \cdot \vec{a}$$

zusammen mit der früher abgeleiteten Gleichung  $\vec{a} = -k \nabla T$   
 ist Grundgleichung der Wärmeleitung ; es folgt dann  $C \frac{dT}{dt} = -k \nabla^2 T$

Vorher hätte noch erwähnt werden müssen.  
 Wenn Wärmequelle : dann durch  $\vec{q}$  Strom erzeugt



Aus dem bloß Divergenz kann man gleich ein viel benutztes  
Integralgesetz ableiten: Zudem man es ähnlich in die Volumelemente



$$\iint \vec{a} \cdot \vec{N} d\vec{F} = \iiint \operatorname{div} \vec{a} d\tau$$

denn alles was durch ~~hin~~ ist, muss durch die  
Oberfläche hinwegströmen sein

Das ist nichts anderes als ein Spezialfall des Green'schen Satzes

$$\iiint \left( \frac{\partial a_1}{\partial x} + \frac{\partial a_2}{\partial y} + \frac{\partial a_3}{\partial z} \right) dx dy dz = \iint (a_1' - a_1) dy dz + (a_2' - a_2) dx dz + \dots$$

$$= \iint a_1' dy dz + a_2' dx dz + \dots$$

$$= \iint (a_1' \cos l + a_2' \cos m + a_3' \cos n) d\vec{F} = \iint \vec{a} \cdot \vec{N} d\vec{F}$$

$$\nabla \nabla \vec{a} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = \operatorname{curl} \vec{a} \quad \begin{array}{l} \text{Einsetzen natürlich nur als} \\ \text{Abkürzung eingeführt} \end{array}$$

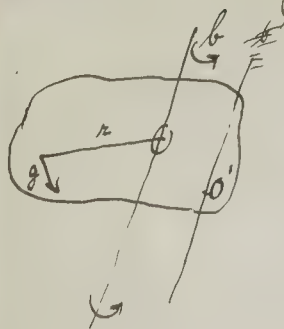
Die Bedeutung davon ist etwas weniger leicht einzusehen

Die ist erst klar wenn man wieder mechanische Anwendung macht  
dann müssen wir <sup>ein Skalarfeld</sup> für allgemeine Bewegung eines starren Körpers einschreiben.

Exkurs über Bewegung eines starren Körpers:

$\frac{1}{15}$

55



$$g = a + V \times r \times b$$

Zusammensetzung verschiedener Folgen

$$g = a + V \times r \times b + V \times r' \times b' + \dots = a + V \times (b + b' + \dots) + a' + \dots$$

Glücke aber entgegen

Drehung um parallele Achsen, wenn

$$V \times r \times b - V \times r' \times b' = V \times (r - r') \times b$$

constant, unabhängig von Lage

des Endpunktes im Körper, daher = Translation  $\perp r - r'$ , b

Zerlegung von a in Comp.  $\perp$  und  $\parallel$  b = c + m b

$$g = c + V \times (r + d) \times b + m b$$

$$c = V \times b \times d$$

$$= V \times b \times (r + d) + m b$$

Schraubbewegung, als solche kann in jedem einzelnen Momente die allg.

Bewegung eines starren Körpers aufgefasst werden; Momentenaxe ist die Axe der Schraubung, d.h. die Richtung der Bewegung. In jedem Momente eine andere Lage haben.

$$\text{Jetzt: } \text{curl } g = \text{curl } (a + V \times r \times b)$$

$$= \text{curl } V \times r \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \begin{vmatrix} y & z \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} z & x \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} x & y \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \end{vmatrix}$$

$$V \times r \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$= i \{ +b_1 + b_1 \} + \dots = 2(i b_1 + j b_2 + k b_3) = 2 \mathbf{b}$$

Also ist die Drehung genau im oben Fall  $\mathbf{b} = \frac{1}{2} \text{curl } \mathbf{g}$   
 Man kann natürlich die ~~Def~~ Diff. Operation als bloß symbolischen  
 Abkürzung einführen und <sup>ist</sup> immer aufpassen in  $i^2 = -1$  ... , aber die gezielte  
 Nutzen für die Vorstellung liegt eben darin, dass sie unabhängig sind  
 von den gewählten Koordinaten, was auch im <sup>Symbol-</sup>Zeichen angedeutet ist, in dem  
 es die Koordinaten nicht enthält, und dass sie durch den bloßen  
 Namen schon an ihre Wirkungsweise erinnern.

So erinnert also die schon daran dass der Flüssigkeitsfluss, welcher  
 durch den Vektor dargestellt wird, an der betreffenden Stelle divergiert, d.h.  
~~sich~~ auseinanderströmt, also dass mehr aus einem Vol. element austritt  
 als einströmt, den Überschuss pro Vol. element ist eben durch den Betrag von  
 die gegeben.

Ebenso erinnert der Name  $\text{curl} = \text{Quirl}$  an Wirbel oder Rotationen  
 und an die mechanische Interpretation dieser Operation

Ebenso wie wir die mit einem Integralen in Verbindung gebracht haben  
 ist  $\text{curl}$  auch mit einem vielgebrauchten Satze assoziiert:

$$\oint \mathbf{A} \cdot \text{curl } \mathbf{a} \, d\mathbf{f} = \int \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$$



Am einfachsten in umgekehrter Weise zu beweisen:

$\frac{3}{15}$   
56

In dem rechteckigen Sinne positiv

$\int \vec{a} \cdot d\vec{r}$  kann über geschlossene Curve kann in Netzwerk zerlegt werden

$$= \sum \int \vec{a} \cdot d\vec{r} \quad \text{--- ~~2/15~~ ---}$$

$$= \sum \int (a_1 dx + a_2 dy + a_3 dz) = \iint \underbrace{a_1}_{\text{von } \vec{a} \text{ entz.}} dF_1 + \underbrace{a_2}_{\text{von } \vec{a} \text{ entz.}} dF_2 + \underbrace{a_3}_{\text{von } \vec{a} \text{ entz.}} dF_3$$

= Summe der Projektionen auf die 3 Ebenen

$$= \sum \int \left( \frac{\partial a_1}{\partial y} dy dx + \frac{\partial a_2}{\partial x} dx dy + \dots \right)$$

von der Projektion auf XY

$$= \sum \left( \frac{\partial a_2}{\partial x} - \frac{\partial a_1}{\partial y} \right) dF_3 + \left( \frac{\partial a_3}{\partial y} - \frac{\partial a_2}{\partial z} \right) dF_1 + \left( \frac{\partial a_1}{\partial z} - \frac{\partial a_3}{\partial x} \right) dF_2$$

$$= \sum \int \underbrace{\left( \frac{\partial a_2}{\partial x} - \frac{\partial a_1}{\partial y} \right)}_{\text{curl}_3} dF_3 + \underbrace{\left( \frac{\partial a_3}{\partial y} - \frac{\partial a_2}{\partial z} \right)}_{\text{curl}_1} dF_1 + \underbrace{\left( \frac{\partial a_1}{\partial z} - \frac{\partial a_3}{\partial x} \right)}_{\text{curl}_2} dF_2$$

$$= \sum \int \vec{a} \cdot \text{curl} \vec{a} \cdot \vec{N} \cdot d\vec{F} = \iint \vec{N} \cdot \text{curl} \vec{a} \cdot d\vec{F}$$

Einen anderen Beweis werden wir noch später kennen lernen

Satz von Stokes.

Integral von der Form  $\int \vec{a} \cdot d\vec{r}$  nennen wir Linienintegral von  $\vec{a}$  über die  $\int \vec{N} \cdot \text{curl} \vec{a} \cdot d\vec{F}$  Flächen...

Also das ~~Flächenintegral~~ Linienintegral

Flächenintegral ~~des~~ <sup>des</sup> ~~curls~~ eines Vektor = Linienintegral über den Umfang der Fläche.

~~Man könnte nun fragen, wie groß das Integral über ein Stück einer solchen Curve ist~~

Man sieht nun folgendes:

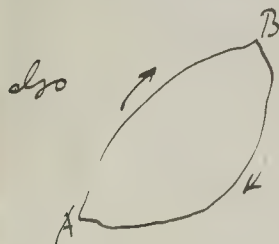
Sobald die Begrenzungscurve ~~constant~~ <sup>denselben</sup> ist, ist der Wert des  $\int$  von der übrigen Form der Fläche ganz unabhängig.



daher auch  $\oint \text{Nurda der über geschlossene Fläche} = 0$

Wie groß  $\int$  über Curvenstück. Das wollen wir nur in einem speziellen einfachen Falle betrachten:

Wenn curl überall  $= 0$  ist, ist das ganze Linienintegral  $= 0$



also  $\int_A^B + \int_B^A = 0$   $\int_A^B = \int_A^B$  ganz unabhängig von dem Integrationswege

[Wir betrachten dabei einstweilen nur einfach zusammenhängende Räume]

Dann ist der Wert derselben also eine eindeutige Funktion des Endpunktes von B, mit welcher eine skalare Größe:

also  $\int_A^x = f(x) = \text{P}$

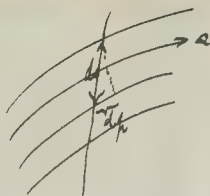
Das gilt aber wieder nur wenn curl ~~überall~~ <sup>überall</sup>

Wenn Endpunkt x sich etwas verschiebt:  $\int_{x_0}^{x+dx} a dx = -\delta P$   
 $\int_{x_0}^{x_0+dx} a_0 ds \cos \alpha ds = -\delta P$

$$a_0 = - \frac{\delta P}{ds \text{ (wgsds)}}$$

$$a_0 = - \frac{\delta P}{\delta p}$$

$$a = - \nabla P \quad \text{denn auch Richtung des stärksten Abfalls von } P$$



Flächen gleichen Wertes von P

P ändert sich am meisten in der Richtung von a also

also auch Richtung des stärksten Abfalls von P

Da erkennen wir also die gewöhnliche Bedeutung von P, a ist <sup>was wir</sup> P = Potential <sup>oder</sup> Druck, resp. Arbeit, a = Kraft, <sup>Elektr. Feldstärke</sup> <sup>oder</sup> Flussdichte. Dann heißt also diese Sätze: Arbeit über geschlossenen Curve = 0 Potential kommt auf denselben Wert zurück.

Wo dagegen  $\text{curl } a \neq 0$ , dort gibt es überhaupt kein Potential für a.

10. Regelmäßige Kraft im Inneren eines Strom Leiters.

Ein besseren Einblick in diese Dinge gewinnt man noch nach Einführung der doppelten Diff. Qu.

Wenn man zwei noch einander erwidert 10.

$$\text{div } \nabla P = \nabla \nabla P = \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial x^2}}_{\text{Laplaces Quotient}} \dots = \nabla^2 P$$

$\text{curl } \nabla P = 0$  also wie auch oben: Kraft verläuft von ein Pot. <sup>heraus ist nicht hilfreich</sup> <sup>versteht</sup>

$$\left[ \nabla \text{ div } P = \left( i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z} \right) \left( \frac{\partial a_1}{\partial x} + \frac{\partial a_2}{\partial y} + \frac{\partial a_3}{\partial z} \right) \dots \right]$$

$$\nabla^2 a = i \nabla^2 a_1 + j \nabla^2 a_2 + k \nabla^2 a_3$$



~~erst~~

div curl  $\mathbf{a} = 0$  also curl eines Vektors ist verthelt wie Drehwindigkeit  
in einer incompress. Flüssigkeit

$$\text{curl}^2 \mathbf{a} = \nabla \text{div} \mathbf{a} - \nabla^2 \mathbf{a}$$

Ordnen wir uns nun die ~~Ansätze~~ ~~die~~ ~~curl~~ ~~und~~ ~~div~~ ~~a~~  
 $\text{rot} a = 0$  nach Voraussetzung d.h.  $\text{curl } \nabla P = 0$

Das gilt ganz allgemein für ein beliebiges skalares  $P$

Ansrechnen!

$$\text{div } a = \text{div } \nabla P = \sum \nabla \nabla P = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \dots = \nabla^2 P$$

Laplacian-Operator

Diese Verbindungen von zwei Operationen wollen wir näher untersuchen

Von skalaren <sup>Funktionen</sup> ~~Operationen~~ können wir bilden:

$$\text{div } \nabla P = \nabla^2 P$$

$$\text{curl } \nabla P = 0$$

Von Vektorfunktionen:

$$\nabla \text{div } b = \left( i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z} \right) \left( \frac{\partial b_1}{\partial x} + \frac{\partial b_2}{\partial y} + \dots \right)$$

$$\text{curl } \text{curl } b = 0 \quad \text{Ansrechnen}$$

$$\text{curl } \text{curl } b = \text{curl}^2 b$$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial b_1}{\partial x} & \frac{\partial b_2}{\partial y} & \frac{\partial b_3}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial b_1}{\partial x} & \frac{\partial b_2}{\partial y} & \frac{\partial b_3}{\partial z} \end{vmatrix}$$

$$= i \left( \frac{\partial^2 b_2}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 b_1}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 b_3}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 b_3}{\partial x \partial z} \right) + \dots$$

$$= i \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial b_1}{\partial x} + \frac{\partial b_2}{\partial y} + \frac{\partial b_3}{\partial z} \right) - \left( \frac{\partial^2 b_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 b_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 b_1}{\partial z^2} \right) \right]$$

$$= i \left[ \frac{\partial}{\partial x} \text{div } b - \nabla^2 b_1 \right]$$

$$+ j \left[ \frac{\partial}{\partial y} \text{div } b - \nabla^2 b_2 \right]$$

$$+ k \left[ \frac{\partial}{\partial z} \text{div } b - \nabla^2 b_3 \right]$$

$$= \nabla \text{div } b - \nabla^2 b$$

Somit ist auch  $\nabla^2 b$  definiert.

Jetzt kehren wir zurück zu früherem Gegenstande

$\phi = -\nabla P$  also kann man  $\phi$  berechnen wenn  $P$  gegeben ist  
wenn dagegen  $\phi$  gegeben ist, so  $P = \int \vec{\phi} \cdot d\vec{r}$

Man kann aber auch für  $P$  einen anderen Ausdruck finden indem  
man  $\text{div } \phi = \nabla^2 P$  auflöst

wenn nämlich  $\text{div } \phi =$  Quellenstärke gegeben ist  $= \rho$  skalare Dichtigkeit,  
das zugehörige  $P$  zu finden

$$-\nabla^2 P = \rho = f(x, y, z) \quad \rho = \text{Quellenintensität}$$

Wenn man nun  $\rho$  zerlegt in  $\rho = \rho_1 + \rho_2 + \rho_3 \dots$  und dementsprechend

$$\text{auch } -\nabla^2 P_1 = \rho_1, \quad -\nabla^2 P_2 = \rho_2, \quad -\nabla^2 P_3 = \rho_3 \text{ etc.}$$

So wird auch  $P = P_1 + P_2 + P_3 \dots$  weil alle Gleichungen linear sind  
und daraus  $\phi = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 \dots$  wenn  $\text{div } \phi_1 = \rho_1, \text{ div } \phi_2 = \rho_2, \dots$

Also kann man das Potential welches ~~aus~~ einer Summe von Quellen  
besteht ist, und die entsprechende  $\phi$  Bewegung auch ~~als~~ Summe  
der Einzel  $P$  und damit  $\phi$  gewinnen welche jedem  $\rho_i$  entsprechen

Also zerlegen wir die in Raum verteilte  $\rho$  und betrachten nur  
die  $\rho$  eines gewissen Volumenelementes

Was wird das dementsprechende  $\phi$  sein?



$\phi$  ist überall im Raum symmetrisch, also auf  
Kugelfläche mit Radius  $r$  gleichförmig verteilt

$$4\pi r^2 \phi = q \quad \text{da}$$

$$\phi_0 = \frac{q}{4\pi r^2} \quad \text{oder: } \phi = \frac{q}{4\pi r^2}$$

Das entsprechende  $P$ ?

$\frac{3}{16}$

Aus besten aus Linienintegral

$$P - P_0 = \int_{P_0}^P \nabla a \cdot d\mathbf{r} \quad \text{wenn wir als } P_0 \text{ den Wert in } \infty \text{ annehmen } = 0$$

$$P = \int_{\infty}^P \nabla a \cdot d\mathbf{r} = \frac{q}{4\pi} \int_{\infty}^P \frac{dr}{r^2}$$

$a$  und  $dr$   
wird hier die beiden Comp. zusammenfallen und es ein gewisses  $\frac{1}{r^2}$

$$= \frac{q}{4\pi} \int_{\infty}^P \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi} \left[ -\frac{1}{r} \right]_{\infty}^P = \frac{q}{4\pi P}$$

Also haben wir sowohl das  $a$  als auch das  $P$  welches einem gewissen  $q$  entspricht, somit das ganze  $P$  und  $a =$  Summe

$$P = \int \frac{q \, dv}{4\pi r} \quad Q = \int \frac{q \, dv}{4\pi r^2}$$

bekannte physikalische Form der Pot. Reihe  $\nabla^2 P = -q$

oder wenn man  $\frac{q}{4\pi} = \rho$  setzt:  $P = \int \frac{\rho \, dv}{r} \quad \nabla^2 P = -4\pi \rho$

wir können das auch so schreiben:  $P = \text{pot } q$

$$P = \text{pot. } \nabla^2 P$$

$\nabla^2$  und  $\text{pot}$  sind inverse Operationen

Natürlich können in Allgem wenn  $P$  in  $\infty$  oder 0 sein noch Integrations Constanten dazukommen.

Wenn also irgend eine der drei GröÙen  $P, a, q$  gegeben ist - so können wir jetzt die beiden anderen daraus ausrechnen.



Somit lehnt man den Begriff des Potentials gewöhnlich in der  
Gravitation oder Electr. Lehre zuerst kennen, dann pflegt man  
sich erstens zu sein, dass in der Hydrodynamik dasselbe wiederkehrt.  
Das heißt aber darauf, dass diese Sätze eigentlich ganz <sup>allgemein</sup> geometrischen  
Natur sind.  $P$  ist eigentlich bloß mathematische Hilfsgröße.

In Hydrodynamik. bedeutet  $q$  Quellensärke,  $a$  Flüssigkeitsgeschwindigkeit.

In ~~Electr.~~ Gravitation  $q$  resp.  $\rho$  Massendichte  $a$  Kraft

Electr.

.. Electr. Dichte

resp. Massen etc.

~~Das heißt aber~~ Man braucht eigentlich nicht den Umweg über  $P$  zu machen  
um  $a$  aus  $q$  zu berechnen.

Der Nutzen des  $P$  besteht darin, dass es eine rein scalare Function ist,  
welche im Allgemeinen viel leichter zu berechnen ist.

Natürlich braucht man nicht dem  $q$  oder dem  $P$  eine reale Existenz  
zuzuschreiben. Bei Gravitation hat dies noch einen gewissen Schein  
von Berechtigung an sich, denn es zeigt sich, dass dort  $q$  im Allgemeinen  
nur dort  $\geq 0$  ist, wo Materie sein kann, also scheint  
es notwendig diese gewissermaßen als Ursache aufzufassen, obwohl dies  
keine hinreichend begründete ist. Bei Electr. Lehre dagegen ist ~~kein~~ ein  
solcher Grund nicht vorhanden; ~~es~~ in der alten Electr. Lehre sind  
die Electr. und Magn. Kräfte als das objective existierende Agens  
angesehen worden und die Kräfte nur als ihre Function, Wirkung.

60 5/16

In der neuen Theorie hat man diesen Standpunkt aufgegeben.  
 Elektr. Name sieht man daraus als Redungs Ausdruck an, wie, Putsch.  
 Gedanken von Ursache Wirkung etc. kommen da überhaupt nicht vor.  
 Nachdem es ist bequem ~~das~~ auf  $q$  einzugehen, meistens  
 geriert man aber direkt mit der Elektr. Kraft welche ja bis zu  
 einem gewissen Grade physikalisch messbar ist.

Alles dies nur wenn  $\text{curl} = 0$ ; was nun wenn dies nicht der  
 Fall ist? Da werden wir wieder einen Spezialfall betrachten  
 nämlich  $\text{div} = 0$   $\text{curl} \neq 0$ , da es sich zeigen wird, dass man  
 überhaupt jedes Feld als Überlagerung zweier solcher Felder  
 auffassen kann

In vorigen Stunden haben wir Vorzeichen nicht näher beachtet.  
 Wir hatten abgeleitet:

$$a = \nabla P$$

$$P = \int \frac{\text{div } a}{k} dv$$

$$\text{div } a = \nabla^2 P$$

es ist nun in der Physik üblich dem  
 entgegengesetzten Werth  $-P$  als Potential

aufzufassen

Die Grund ist folgender: Wenn  $P =$  mechanisches Potential  
 $a =$  " Kraft

Es ist

~~$$m \frac{d^2}{dt^2}$$~~ 
$$m \ddot{x} = \nabla P$$

$$m \frac{\dot{x}^2}{2} = \int \nabla P dx = P$$

$$m \frac{\dot{x}^2}{2} - P = \text{constant}$$

Es wäre also die Differenz

zwischen  $LK$  und pot. Energie constant; da es uns aber besser zusagt  
 die potentielle Energie auch als eine  $LK$  anzusehen, welche an sich  $\nabla \cdot \vec{a} = 0$  ist,  
 so geben wir dem  $P$  das - Zeichen, oder fassen -  $P$  als Potential auf,  
 damit wir sagen können: die Summe der  $LK$  und der pot. En-  
 ergie ist constant dann ist also:

$$a = -\nabla P$$

$$\operatorname{div} a = -\nabla^2 P = \rho$$

$$P = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\operatorname{div} a}{r_0} dv = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\rho}{r_0} dv$$

Laplace'sche Form:  $\nabla^2 P = -4\pi \rho$

$$P = \int \frac{\rho}{r_0} dv$$

$$a = -\nabla \int \frac{\rho}{r} dv = -\int \frac{\rho \vec{r}}{r^3} dv = -\int \frac{\rho}{r^2} \vec{r} dv$$

Jetzt gehen wir zu dem zweiten Hauptfall über, wo  $\operatorname{div} a = 0$  und  $\operatorname{curl} a \neq 0$   
 $\vec{a}$  kann nicht dargestellt werden als  $\nabla P$  denn dann ist  $\operatorname{curl} a = 0$   
 also muss  $\operatorname{curl} a$  ein solches  
 also bleibt nur  $\operatorname{curl}$  übrig.

Probieren also ob

$a = \operatorname{curl} b$  gesetzt werden kann, wenn  $\operatorname{curl} a$  beliebig gegeben ist

$\operatorname{div} a = 0$  stimmt

$$\operatorname{curl} a = \operatorname{curl}^2 b = \nabla \operatorname{div} b - \nabla^2 b = c \quad \left| \begin{array}{l} \text{Wir wählen ab die einfachste} \\ \text{Art von } b \text{ so dass } \operatorname{div} b = 0 \end{array} \right.$$

$$\nabla^2 b = -c$$

Das ist aber ja die gewöhnliche Potentialgleichung

$$\nabla^2 b = i \nabla^2 b_1 + j \nabla^2 b_2 + k \nabla^2 b_3 = -(i c_1 + j c_2 + k c_3)$$

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 b_1 &= -c_1 & b_1 &= \frac{1}{4\pi} \int \frac{c_1}{r_0} dv \\ \nabla^2 b_2 &= -c_2 & & \\ \nabla^2 b_3 &= -c_3 & & \end{aligned} \right\} \begin{aligned} b &= i b_1 + j b_2 + k b_3 \\ &= \frac{1}{4\pi} \int \frac{i c_1 + j c_2 + k c_3}{r_0} dv \end{aligned}$$

$$b = \frac{1}{4\pi} \int \frac{c}{r_0} dv$$

$$b = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\text{curl } a}{r_0} dv$$

$$a = \text{curl} \left\{ \frac{1}{4\pi} \int \frac{\text{curl } a}{r_0} dv \right\}$$

$b$  nennt man das Vektorpotential von  $a$

Falls also  $\text{curl } a = 0$  ist  $\Rightarrow$  so kann jede solche Funktion durch die Operation  $\text{curl}$  von einem Vektorpotential abgeleitet werden.

| <del>div</del> $\text{curl } a = 0$        | $\text{div } a = 0$                        |
|--|--|
| Quelle $q = \text{div } a$                 | Wirbel $c = \text{curl } a$                |
| $P = \frac{1}{4\pi} \int \frac{q}{r_0} dv$ | $b = \frac{1}{4\pi} \int \frac{c}{r_0} dv$ |
| $a = \nabla P$                             | $a = \text{curl } b$                       |
| $q = -\nabla^2 P$                          | $c = \text{curl}^2 b$                      |



Auf einem Punkt muss ich <sup>jetzt</sup> hier noch <sup>näher</sup> genauer eingehen,  
nämlich die Frage der eventuellen Integrations Constanten.

Wenn Pot. gegeben ist, so <sup>kann man</sup> ohne weiteres davon  $a$  bilden, und daraus  
wieder  $\text{div } a$  oder  $\text{curl } a$ . Bei dem umgekehrten Vorgehen tritt  
die Frage auf, ob man zu einem Potentialen nicht noch Funktionen  
zuzufügen muss welche den Integrationsconstanten bei gewöhnlicher  
Integration entsprechen.

Ein solche <sup>Vektor-</sup>Function  $a$  müsste sowohl  $\text{div } a = 0$   
 $\text{curl } a = 0$  haben  
daraus folgt aber noch nicht dass sie  $\text{null} = 0$  ist; eine jede Constante  
würde dem all. genügen

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial a_1}{\partial x} + \frac{\partial a_2}{\partial y} + \frac{\partial a_3}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial a_1}{\partial y} - \frac{\partial a_2}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial a_1}{\partial z} - \frac{\partial a_3}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial a_2}{\partial z} - \frac{\partial a_3}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}: \quad \frac{\partial^2 a_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 a_3}{\partial x \partial z} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial z}: \quad \frac{\partial^2 a_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_3}{\partial z^2} &= 0 \end{aligned}$$

Also  $\nabla^2 a_1 = 0$   $\nabla^2 a_2 = 0$   $\nabla^2 a_3 = 0$  wie ihm weiteres sprechen

~~Wenn man <sup>hier</sup> <sup>ein</sup> <sup>einzelnen</sup> <sup>Skalar</sup> <sup>größen</sup> <sup>aus</sup>  <sup>$\nabla^2 a = 0$</sup>~~  <sup>aus  $\text{curl } a = 0$</sup>   
Also können zu einem Potentialen eigentlich noch Funktionen dazu-  
gefügt werden welche diesen Laplace'schen Gleichungen genügen.

62  
5  
Aber nur unter der Bedingung, dass die Grenzbedingungen genügend  
gelöst sind.

Bei solchen Funktionen beschäftigt man sich in der Physik ganz besonders  
mit dem Gravitationsfeld ~~und~~ zwischen  $Q$  und  $\delta$  etc.

Elektrostatische Felder etc.

Wir würden demnächst auch fortwährend zu thun haben, falls wir  
begehrte physikalische Felder in Betracht ziehen würden. Wir  
erstrecken aber im Allgemeinen jene Integration über den  
gesam unendlichen Raum und dabei fallen diese Funktionen meistens  
weg. Dies folgt aus einem Satz der Potentialtheorie, den ich jetzt  
wohl als bekannt voraussetzen darf: <sup>ihnen später noch einmal bringen</sup>

<sup>eine Funktion welche die</sup>  
24 ~~das~~ <sup>ist</sup> (Potential) <sup>auf einer geschlossenen</sup> <sup>oberfläch.</sup> <sup>constant</sup>  
<sup>in einem des Raumes</sup> <sup>ist</sup> <sup>so ist sie überhaupt in dem ganzen</sup>  
betrachteten Raume constant.

Also wenn sie  $\infty = 0$  ist, so ist sie im Inneren überall gleich Null.  
Nun sieht ein: würde das Potential weichen ins Innere hinein



so müsste es irgendwo ein Maximum besitzen  
dann wäre aber aber die Kraft von diesem  
Punkte überall nach außen gerichtet daher

könnte dies nicht  $= 0$  sein. Es müsste an der betreffenden Stelle  
eine Masse vorhanden sein, was aber die Voraussetzung der Gleichung  $\nabla^2 \phi = 0$   
widerspricht.

Wenn wir jetzt diese geschlossene Fläche ins  $\infty$  rücken, so erhalten wir den Satz: eine Funktion welche im Unendlichen überall  $= 0$  ist und überall der Body  $\nabla^2 \phi = 0$  resp.  $\nabla^2 A = 0$  genügt, ist überall  $= 0$ .

Im Allgemeinen werden wir aber nur solche Kräfte etc. betrachten welche ~~nicht mehr~~ im unendlichen Entfernung verschwindend klein werden, daher werden wir diese Functionen im Allg. nicht zu berücksichtigen brauchen. In speziellen Fällen v. B. in der Electrostatik werden wir übrigens noch näher darauf zu sprechen kommen.

~~Im Allgemeinen~~ Wir haben bisher also 3 spezielle Arten von <sup>Vekt.</sup> Funktionen gelernt:

$$\text{div} = 0$$

$$\text{curl} = 0$$

$$\frac{\text{div}}{\text{curl}} = 0$$

Jetzt wollen wir einen äußerst interessanten Satz beweisen, dass man nämlich jede räumliche Vektorfunction aus solchen Functionen zusammengesetzt denken kann.

$$f = g + h = -\nabla P + \text{curl } b$$

$$\text{div } f = -\nabla^2 P$$

$$\text{curl } f = \text{curl } b = -\nabla^2 b$$

$$P = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\text{div } f}{r_0} dv$$

$$b = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\text{curl } f}{r_0} dv$$

63  
Also kann kommt eventuell noch eine Funktion der früher  
begründeten Art  $V_A$  wo  $V_A = 0$ , die kann wir uns aber mit  
dem  $P$  vereinigen lassen.

Also eine ganz beliebige Funktion aufzufassen als Äquivalent  
aus zwei Arten von Potentialen. Das Merkwürdige dass sie nach  
derselben Art gebildet sind: das scheint als ob Newton'sche  
Gravitations Kräfte wirken würden, und analog auch das Vertikale.  
Man könnte somit eine ganz beliebige Kraft ~~funktion~~ auf  
Newton'sche Kräfte zurückführen, dessen wäre es nicht möglich  
denselben  $\propto 1/r^2$  auf Kräfte von der Form  $\frac{1}{r^3}$  zurückzuführen, wo  
dann im Nenner des Potential Ausdruckes  $\frac{1}{r^2}$  stehen würde.

Wir sehen dessen dass es ein guter Grund hat, wenn in der Physik  
gerade die Summe  $\frac{1}{r^2}$  so vorherrscht; das liegt eben darin dass  
die Flächen zweidimensional, der Raum dreidimensional ist.  
Natürlich will ich damit nicht gesagt haben, dass ich ich das  
Gravitationsgesetz für „a priori“ erachtet habe. Es ist allerdings richtig  
dass ich auf Grund der Erfahrung sagen könnte das Gravitationsfeld müsste sich  
auf „eingeführte Newton'sche Kräfte“ zurückführen lassen, wenn sich  
auch gar nichts aus der Erfahrung weiss, aber dass diese eingeführten



Reson gerade nicht dort befindend, wo ich theoretisch Kugeln sein  
und fühlte ist das Merkwürdig, mit noch Merkwürdig, dass sie  
den Trägheitsmoment genau proportional sind. Wahrscheinlich gilt  
ja das Newtonsche Gesetz nicht genau; dass es aber so annähernd  
gilt, ~~dass~~ insbesondere das Gravitationsmoment = Trägheitsmoment das  
ist das dunkelste noch nicht erklärte Moment.

Bei Elektricität ist dies nicht mehr der Fall, da ich mit  
fühle in die deutschen Namen nicht, wir brauchen sie auch nicht  
zur Erklärung der Trägheit, es sind eben rein „fingirte Massen“,  
welche mit keinem andern Geschie in Zusammenhang stehen,  
außer vielleicht mit der Electrolyse. Das ist der einzige  
Moment welches noch dafür spricht, dass nämlich die elektr. Kr.  
mit den chemischen Äquivalenten in so nahem Berührung stehen, sonst  
würde der Begriff electr. Masse überhaupt nicht aufgehen.

Die durch die Aethertheile aus und V sind zu einem grossen Theil von  
einander unabhängig und zeigen sehr verschiedene Eigenschaften

$$\mathbf{e} = \nabla \int \frac{1}{r_0} \frac{div \mathbf{q}}{r_0} dv + \text{curl} \int \frac{\text{curl} \mathbf{q}}{4\pi r_0} dv$$

Constructieren falls die und curl gegeben sind, + A

Physikalisch ganz unklar

Kraftlinien entweder endlich oder unendlich oder geschlossen

Thema

Erwartungen

Wärmelitung & Diffusion  $\text{cp} \frac{\partial \theta}{\partial t} = \text{div} \mathbf{q}$

$$\mathbf{q} = \kappa \nabla \theta$$

Strom + curl?

Hydromechanik

Elektrizität. Heinrich hat die Ursache der Blaugruft in sich die beiden Antanthiden untersucht.

$$\kappa \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} + L(\mathbf{e} - \mathbf{e}') = \text{curl} \mathbf{h} \quad \left. \begin{array}{l} \end{array} \right\} \text{Zurück} = \text{Hertz}$$

$$\mu \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} = - \text{curl} \mathbf{e}$$

$\mathbf{h}$  vektorartig;  $\mathbf{e}$  vektorfrei = elektrisch, vektorartig = induziert, elektrisch

Überwindet die Theorie: Elektrisch.

$f = - \frac{m m'}{r^2}$  Dann Elektrischkeit; scheinbar Ladg.

Unum Negativismus; wirkt für die Zusammenhänge

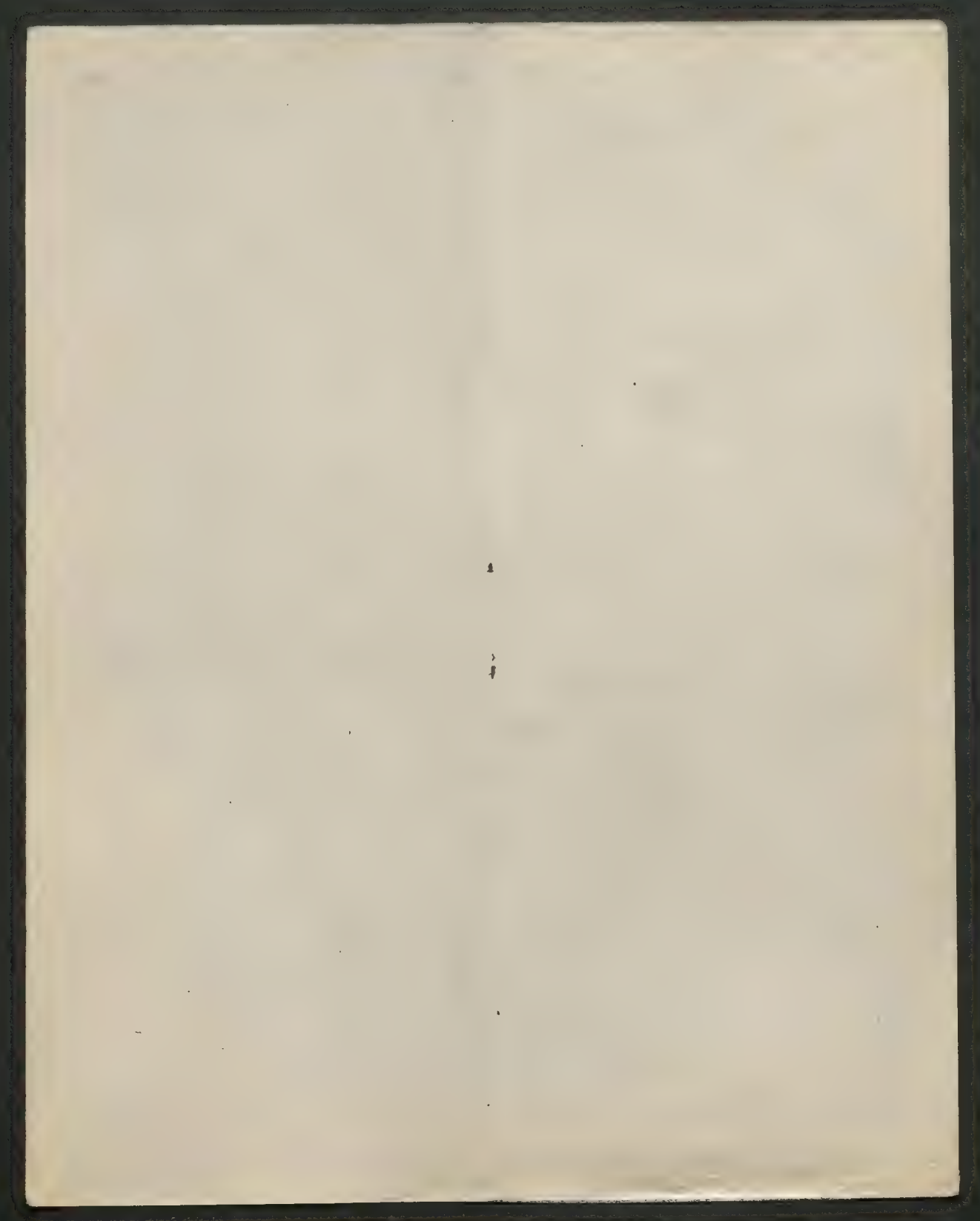
$$m \frac{ds \sin \epsilon}{r^2} \quad i \frac{ds ds'}{r^2} \left( \frac{1}{2} \cos \theta \cos \theta' - \cos \epsilon \right) \quad i \iint \frac{\cos \epsilon}{r} ds ds'$$

Dopp. Ströme. Potentiale von Kein Zusammenhänge untereinander  
ob Bedingungscharakter: mögen Wirkungen ausstrahlen.

$$\text{Weber: } f = \frac{m m'}{r^2} \left( 1 - \epsilon^2 \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + 2 \epsilon^2 r \frac{d^2 r}{dt^2} \right) \quad \text{Dopp. Maxwell}$$

kein  $\frac{1}{r^2}$  kein  $m$ , aber doch davon ableiten; Sind Diff. Ströme in Termen der

$\frac{\partial}{\partial t}$ ; keine Formelung // auch Röntgen: Variabilität von  $\mu$ ; nur für Ruhe genau; formell



65 17

Das wichtigste Ergebnis unserer letzten Untersuchung, welches ich jetzt noch kurz wiederholen will, war also: dass eine beliebige Vektorfunktion lässt sich immer in zwei Bestandtheile zerlegen, einen Wirbelfreien und einen quellenfreien, die vor ein malen mit einem Vektorpotential abgeleitet werden können

$$\mathbf{a} = \nabla \int \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \mathbf{a} \, dv + \operatorname{curl} \int \frac{\operatorname{curl} \mathbf{a}}{4\pi} \, dv$$

Man kann den Satz auch so aussprechen: Falls  $\operatorname{div} \mathbf{a}$  und  $\operatorname{curl} \mathbf{a}$  für jeden Punkt des Raumes gegeben sind kann man das dem gehörige  $\mathbf{a}$  selbst construiren. Eine Unbestimmtheit liegt nur noch darin, dass eventuell eine Function  $A$  hinzugefügt werden muss, welche  $\nabla^2 A = 0$  genügt. Die Wert dieser Function wird sich bestimmen lassen, falls die Werten von  $\mathbf{a}$  an einer frei geschlossenen Oberfläche als die Grenzwerte gegeben sind. Wie werden im Allgemeinen die Integration über den ganzen unendlichen Raum erstrecken, ~~also~~ und mit Functionen operiren, die sich nicht bis ins  $\infty$  erstrecken, dann ist  $A = 0$  wie ich letzten Mal, schon erwähnt habe.

Die Wichtigkeit dieses Zerlegens liegt nun darin, dass bei den physikalischen Functionen die beiden Bestandtheile schon infolge der <sup>bloß</sup> geometrischen Eigenschaften der Wirbelfreiheit resp. Quellenfreiheit, ein ganz verschiedenes physikalisches Verhalten zeigen, und die Eintheilung nach dieser Eigenschaft ist von <sup>denkbar</sup> grundlegender Bedeutung für die Physik.

Ein Mittel, wie man sich dem Unterchiede veranschaulichen kann, habe ich schon letzten Mal besprochen: Kraftlinien resp. Stromlinien

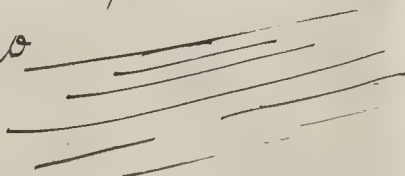
~~Man~~ Man sieht sich Linien, welche überall in die Richtung des Vektors  $\mathbf{a}$  verlaufen, und zwar so viel Linien, dass ihre Anzahl pro Flächeneinheit proportional ist dem



$\frac{2}{17}$  Tensor von  $a$ . Falls Fläche flach so schnell geht es mit auch Kugel geht. Natürlich ist dies aber ein ziemlich rohes Veranschaulichungsmittel, dessen Wert nur dies mit will man sich die Sache räumlich vorstellen muss, mit eigentlich müsste ein unendlich großer Ansatz von Linien folgen werden, um die unendlich kleinen Abtiefungen in der Fläche von  $a$  gerecht zu werden.

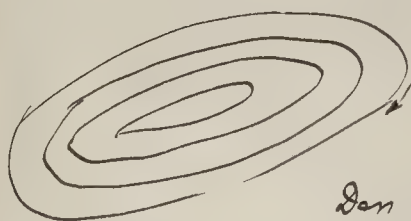
Diese Linien müssen nun entweder Anfangs- und Endpunkt haben, dann ist doch die  $a > 0$  Quelle die  $a < 0$  Senke; oder sie sind in sich geschlossen, oder sie können aus dem  $\infty$  und gehen ins  $\infty$ , letzteres wollen wir ausschließen; dem geschlossenem entspricht ein endlicher Wert des curl.

Winkelbrüchiges Feld



das curl

$\text{curl} = 0$



das  $= 0$  curl curl

unmittelbar ersichtlich

Dass curl curl, sieht man aus Stokes' Satz

Da  $da = \oint \text{curl} \cdot d\vec{r}$  umgeben an einer Stelle  
endlichen Wert das man auch curl curl in

denn umgeben wenn curl  $\neq 0$  wäre so könnte keine geschl. Linie sein.)  
Eindeutlich auch gemischte Felder wo beide Arten vorkommen, dann obige Verhältnisse  
Es gibt nun physikalische Funktionen welche nur den einen Typus angehen  
oder welche beide Arten vereinigen

Ob Gravitations-Feld ganz ersten Typus allerdings dabei ein Schwingung  
muss sein hier die Gravitation mit als Beispiel anführen sollte, denn die

Gravitationsfelder reichen ins Unendliche.

$\lim_{r \rightarrow \infty} (a r^2)$  bleibt endlich, daher eigentlich hier ausgeschlossen.

Sie betr. ja das Aukwürdigste, dass man nur positive Gravitationen kennt, also nur positive Divergenz.

Gegen electrost. Felder.

Wärmeleitung und Diffusion

Dabei müssen wir nur die des Wärme Stromes, ob ein auch existiert wenn wir gar nicht

$$Q = K \nabla \theta$$

$$\operatorname{div} Q = \operatorname{div} Q$$

~~es~~ es wäre möglich, dass man zu  $\rho$  noch ein Glied auch  $\rho$  hinzufügen muss, dass könnten wir gar nicht entscheiden mit unseren heutigen Mitteln, weil wir  $\rho$  eben nur nach seiner Divergenz beurtheilen

Hydrodynamik

Strenge Theil in zwei Bewegungsorte; wirbelfrei ... gekrümmte, gekrümmte Potentiale und Wirbelbewegungen, welche von Helmholtz eingeführt worden ist.

Darauf kommen wir noch zu sprechen bei hydrodyn. Wirbelbewegungen schon

durch den einen Satz in Betracht: eine Wirbelbewegung, kann nie durch

conservative Kräfte hervorgerufen werden; ~~vielmehr~~ besteht sie aber einmal, indem sie

durch Kräfte erzeugt werden ist, welche kein Erhalt. Pot. haben, so

dauert sie ewig, kann wieder nicht durch conserv. Kräfte annulliert

werden. Es sind in Allgemein beide Art von  $\rho$  vertreten.

Noch tiefer eingegraben ist aber die Unterscheid in der Elektrizität. Hier sind beide Klassen von Erscheinungen scharf geschieden, und ~~offen~~ auf diese Unterscheidung ist wesentlich die ganze Maxwell-Hertz'sche Elektrizitätstheorie beruht. Es ist jedenfalls Hertz's Verdienst, <sup>dass er</sup> diesen Punkt ins klare Licht gerückt ~~zu haben~~ hat und damit den schon dunklen alten Potentialtheorie

Theorie von Doppelbelegungen u. s. v. den Sarg ausgemacht hat.

Schreibt man die Maxwell'schen Elektrizitätsgleichungen in unserer Darstellung wie so werden sie ziemlich einfach.

Setzt  $e$  vollen wir die elektrische Kraft, also die Kraft, welche im elektrischen Felde wirkt, bezeichnen, mit  $h$  die magnetische Kraft.

bezeichnen Constanten  $K = \text{Dielektrische Constante}$

$\mu = \text{Magnetische Permeabilität}$

$L = \text{Leitfähigkeit}$

$$\begin{cases} K \frac{\partial e}{\partial t} + L(e - \sigma) = \text{curl } h \\ \mu \frac{\partial h}{\partial t} = -\text{curl } e \end{cases}$$

Wenn noch <sup>und magnetisch</sup> äusseren elektr. Kräfte wirken so kommt in noch dazu:  $-e$

Belegt man das in die Componenten so erhält man zwei Systeme von

3 Gleichungen

$$K \frac{\partial e_1}{\partial t} + L e_1 = \frac{\partial h_3}{\partial y} - \frac{\partial h_2}{\partial z}$$

$$K \frac{\partial e_2}{\partial t} + L e_2 = \frac{\partial h_1}{\partial z} - \frac{\partial h_3}{\partial x}$$

$$K \frac{\partial e_3}{\partial t} + L e_3 = \frac{\partial h_2}{\partial x} - \frac{\partial h_1}{\partial y}$$

$$\mu \frac{\partial h_1}{\partial t} = \frac{\partial e_2}{\partial z} - \frac{\partial e_3}{\partial y}$$

$$\mu \frac{\partial h_2}{\partial t} = \frac{\partial e_3}{\partial x} - \frac{\partial e_1}{\partial z}$$

$$\mu \frac{\partial h_3}{\partial t} = \frac{\partial e_1}{\partial y} - \frac{\partial e_2}{\partial x}$$

57  $\frac{5}{17}$

Dies sind bis auf die Berücksichtigung der Constanten etc. genau dieselben  
Gleichungen in die Hertz als Grundgleichungen der Elektrodynamik aufgestellt  
hat, nur es war ja in der That das Verkennt<sup>der Theorie nicht</sup> von Hertz klar, dass er die  
Maxwell-Hertz'schen Formeln in die <sup>Cartan'sche Form</sup> ~~Maxwell'sche~~ umgestaltet und den  
Deutlichen mündig gemacht gemacht hat.

Man sieht nun aus der ersten Gleichung, wenn  $h$  nicht schon einmal  
divergent vertheilt ist; so wird es immer nur wirbelhaft vertheilt bleiben.  
In der That wird es als Characteristicum der magnetischen Kraft angesehen,  
dass sie immer quellenfrei vertheilt ist, also überall die  $h=0$ , es geht  
keine wahren magnetischen Pole an, (wo man sie eventuell einführt in der  
Analyse da sind es bloße Rechenhilfen).

Dies  $\epsilon$  ist es anders; wäre die Leitfähigkeit überall  $=0$ , so könnte  
auch hier kein Div entstehen, also in einem vollkommenen Dielektricum  
könnten keine elektrischen Ladungen entstehen. Da es aber elektrische  
Leiter gibt, so ist dies nicht der Fall, es werden im allgemeinen auch  
electr. Ladungen entstehen können, also  $\epsilon$  ist theils divergent,  
theils wirbelhaft vertheilt sein.

Diese Kräfte sind nun einander verschieden; das was wir die  
zusammenhängt wurde als electrostatische Kraft bezeichnet,  
dagegen das was früher als inducirte electromagnetische Kraft zusammenhängt



<sup>17</sup> Das ist gerade der Posten<sup>theil</sup> von  $e$  welcher einen real. Post.

Denn wie nun näher darauf eingehen ist es nützlich sich den Unterschied zwischen der newwell'schen Theorie und der älteren Theorie klar zu machen. Eigentlich kann man fast nicht sagen der älteren Theorie ~~offen~~ sondern der älteren Theorien, deren das was mit diesem Namen bezeichnet wird, und das heute auch noch immer den Grundstock des Gedankens was ihre Einheit in England etc. gebildet wird, ist ein bloßes & zusammenhangloses Aggregat von verschiedenen Theorien, das ~~far~~ die historische Entwicklung der Einheitstheorie sein Wesen verdankt, aber dadurch nicht innerlich consequent durchgeführt ist.

Zuerst wurde von Coulomb, Gauss, Cavendish u. a. die ~~Elektrische~~ dynamische Reibungselektrizität näher untersucht und die Gesetze mathematisch formuliert. Da man dabei nur mit ungenügend genügen Elektricität quantität operieren konnte, musste man sich bei den Experimenten immer auf Elektrostatik beschränken; es ergab sich dass man diesen durch das Coulomb'sche Gesetz

$f = \frac{1}{2} \frac{m m'}{r^2}$  genügend hoch kann, eingehend in mathem. Konsequenzen folgt. Später kann dann die Elektrizitätsverteilung, noch später fand man man dass auch auf die Grenzfläche von Medien mit verschiedenen  $\kappa$  ein Koeff. ausgeübt wird. Man erfand den Begriff der elektrischen Ladung. Hypothese von Poisson - Rosatti.

Ganz analog unterstellt man gleichzeitig die Lehre vom Magnetismus, auch  
 sie wieder auf ein analoges Gesetz aufbaubar  $f = - \frac{m m'}{r^2}$  17

Somit scheinen denn beide Erscheinungen, Elektrizität und Magnetismus  
 von einander überhaupt unabhängig zu sein. Man forschte sie als eigene  
 Klassen von physikalischen Phänomenen auf.

Da kennen die Entdeckungen des Einflusses eines galvanischen Stromes auf  
 die Magnetnadel von Ørsted, dann die diesbezüglichen Untersuchungen  
 von Biot und Savart, von Ampère; endlich die inversen Erscheinungen  
 die Erzeugung galvanischer Ströme durch Veränderung von Magneten und durch  
 Induktion seitens anderer Stromkreise von Faraday.

Dadurch wurde die sogenannte galvanische Elektrizität in den  
 Vordergrund des Interesses gerückt d. h. die geschlossenen Ströme wie sie in  
 Leitern entstehen. Jedes dieser Gebiete wurde einzeln durchforscht und  
 für jede Wirkung die entsprechende Gesetze aufgestellt.

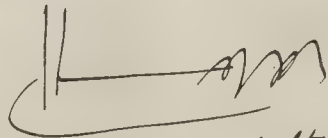
So stellte Biot und Savart das Gesetz auf für die <sup>pondomotorische</sup> (Wirkung eines Strom-  
 elements auf einen Magnet Pol  $\frac{m i ds \sin \theta}{r^2}$

Ampère das Gesetz der <sup>pondomotorischen</sup> (Wirkung zwischen zwei Stromelementen ~~ist das~~

$$\frac{i i' ds ds'}{r^2} \quad \text{oder} \quad \left[ \frac{3}{2} \cos \theta \cos \theta' - \cos \theta \cos \theta' \right]$$

Dann kamen die Gesetze für die electromotorische Kraft welche durch  
 Bewegung oder durch Änderung des magnetischen Feldes hervorgerufen wird

So hing die electromagnetische Kraft welche in einem geschlossenen Stromkreise inducirt wurde, von dem Werthe des Integrals  $\int \frac{cos \alpha}{r^2} ds ds'$  ab.  
~~Mathematisch~~ Indessen fanden wieder andere Forscher  
 andere Elementargesetze, so zeigte Stefan, dass man nicht nöthig habe  
 das Ampère'sche Gesetz in jener Form anzunehmen, es lassen sich ein  
 Ring an der Spitze finden, welche ganz denselben Resultate ergäbe würde.  
 Mathematisch wurden diese Theorien sehr ausgebildet, es sammelte  
 da von den verschiedensten Potentials, Doppelbildungen u. s. w., aber  
 man suchte immer alles ~~hier~~ auf scalare Potentials zurückzuführen.  
 Untereinander waren diese Ercheinungen aber gar nicht gehörig verbunden,  
 man musste eben unterscheiden, ob man es mit electrisischen Fluiden,  
 mit Strömen, mit veränderlichen Strömen, mit bewegten Magneten etc.  
 zu thun hatte und darnach die eine oder andere Gleichung anzuwenden.  
 Das zeigt sich am besten darin, dass es lange Zeit ein Streitfrage  
 war, ob Reibungselectricität überhaupt magnetische Wirkungen ausüben  
 könne. W. Condensation



Sinn dies nicht der Fall gewesen wäre so hätte man ja gar nicht das  
 Recht gehabt, dies auch Electricität zu nennen. Ist unser heutiges  
 Begriffswort nicht natürlich ein Lichtes zu zeigen, dass dies thetisch  
 Stoffe sind.



Es fehlte also eine zusammenfassende Theorie der electro-magnetischen Erscheinungen. Vermuthet wurde es allerdings eine solche aufzustellen. Der bekannteste und vielleicht interessanteste Versuch ist wohl jener von Weber

Koeffizient  $\phi = \frac{1}{2} \frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{1}{2} \frac{d^2 r}{dt^2}$   $f = \frac{1}{r^2} - \frac{q^2}{r^2} \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{2q^2}{r} \frac{d^2 r}{dt^2}$

Sie sehen auch ~~hingeführt er auch von den~~ <sup>führt er alles auf die</sup> freigesten elektrischen Massen zurück, und macht die Sache möglichst dem scalaren Gravitations Potential anzugleichen. Es würde zu weit führen wenn ich auf eine Kritik der Weberischen Theorie eingehen würde. Helmholtz brachte gewichtige Syngemeine vor, welche sich auf das Prinzip der Erh. d. Energie stützen; heute ist es schon ganz vergessen, da die Bertelschen Versuche sämmtliche die Theorie vernichtet haben, da keine die Existenz von Electricität Weltergung erlaubt ansonsten aber die Maxwell'sche.

Dies ist also der erste Versuch einer zusammenfassenden Theorie sämmtlicher electromagnetischen Erscheinungen, die Bertelschen Weltergung und bildet jedenfalls einen ungeheuren Fortschritt gegen die früheren Theorien und ist jedenfalls viel natürlicher, ungeschwungen, enthält weniger hypothetisches als jener. Die zwei Theorien treten da an Stelle jener verschiedenartigen Elementargesetze, und jener lassen sich rein deductiv daraus ableiten — für gewisse Fälle nämlich, wo sie richtig sind.

Sie sehen, dass das Newton'sche, resp. Coulomb'sche Gesetz drinnen nicht vorkommt, der omni-bus Etwas im Nenner ist nirgend enthalten.



<sup>10/7</sup>  
denn sind keine elektrischen Massen drinnen vorhanden und keine  
magnetischen Massen, und trotzdem wurde sich ein elektrostatisches System  
daraus ableiten lassen.

Der hauptsächlichste Unterschied dieser Gleichungen gegen jene ist der,  
dass dies Differentialgleichungen sind, welche für jeden Punkt des Raumes  
gültig sind, jenes aber eine Art von Integralgleichungen.

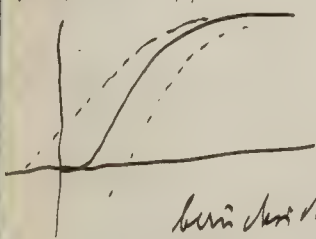
Sie sind also in dem Beschlag der Grundgleichung der Kältheorie

$$C \frac{\partial \theta}{\partial t} = K \nabla^2 \theta \quad \text{oder den hydrodynamischen Gleichungen analog.}$$

Auch insofern als hierin die zeitliche Veränderung des Zustandes  $\frac{\partial \theta}{\partial t}$   
abhängig gemacht wird von den Zuständen  $\theta$  welche in einem bestimmten  
Augenblicke vorhanden sind. Ist die Verteilung eines Vektors zu einer  
gewissen Zeit gegeben, so ist durch die Gleichung die weitere Veränderung  
desselben schon gegeben, das ist der allgemeine Typus der physikalischen  
Gleichungssysteme (mit Ausnahme solcher welche sich auf stationäre  
Zustände beziehen.) Dass die Veränderlichkeit an einem Punkte nur  
von den Zuständen in der unmittelbaren Umgebung des Punktes  
abhängig gemacht wird, pflegt man auch so auszudrücken, dass man  
sagt: die Wirkung ist nicht eine actio in distans, wie bei obigen  
Systemen, wo der Zustand an jedem Punkte gar definiert ist durch  
die Zustände in ganz unendlich fernem Raum, sondern eine Wirkung von  
Volumenelement zu Volumenelement also durch Vermittlung des Mediums.

Das ist allerdings schon mehr behauptet, als in den Gleichungen drinnen <sup>11</sup>/<sub>17</sub>  
steckt; Maxwell hat zwar gewiss diese Reingehalt des Ferromagnetismus  
unmöglich ist, — ebenso wie auch Newton derselbe Ansicht war — aber  
in den Gleichungen ist das nicht ausgedrückt, man kann ja jede  
Integralgleichung in Differentialgleichungen umwandeln und umgekehrt.

Vollkommen tadellos ist nun auch die Maxwell'sche Theorie  
durchaus nicht, und es ist sicher dass sie nicht die Schluss von dem  
der erste Schritt zu einer richtigen Electrostatische Theorie ist. So möchte  
ich bemerken, dass man gerade bei Anwendung auf die stark magnetischen  
Substanzen wie Eisen, Stahl etc. sehr vorsichtig sein muss, denn das  
muß hier als Constante vorausgesetzt während es in Wirklichkeit bei  
dieser Stoffe von der Feldintensität selbst noch abhängt. Dann



können die Erscheinungen der Hysterisis und des  
permanenten Magnetismus, die davon nicht

berücksichtigt sind. Also werden die Gleichungen diesbezüglich mit  
der Zeit noch modifiziert werden müssen. Vielleicht existiert auch ein  
dielectricisches Hysterisis?

Ferner: die Gleichungen gelten eigentlich nur für ruhende Körper, man  
kann sie mit gewissen Modifikationen auch auf bewegte Körper übertragen, aber  
dann wird die Bewegung <sup>Endwindigkeit</sup> von der Ordnung der Lichtgeschwindigkeit sein,  
dann wissen wir gar nicht mehr was dann geschieht, inwiefern die Gleichungen  
brauchbar bleiben etc.

<sup>12</sup>  
17) Um die Frage zu entscheiden, fñhlt uns vor allem noch die experimentelle Seite.  
Voraussetzt wird da das bald ein Entschent gemacht werden, in der ja jetzt die  
Frage inwiefern das Licht ãthm an den Bewegung der Kñrper theilnimmt, im Fluss  
gebracht worden ist, und zahlreiche Untersuchungen dñber neuerdings angestellt  
werden, und dies Kñpft mit dem Frage aufs Dmngste zusammen.

Endlich sind die Gleichungen auch in formeller Beziehung etwas unklar,  
in dem das  $\epsilon$  und  $\mu$  eigentlich nicht direkt messbar sind, und es wñre  
besser wenn man  $\epsilon$  und  $\mu$  hinein bringen wñde, die direkt gemessen werden kñnnen.

Ich bin nun eigentlich in Verlegenheit wie ich die Gleichungen ableiten  
soll. Es sind da verschiedene Methoden fñhrschicklich.  
Wenn direkt aus den Versuchen abzuleiten scheint nicht gut mñglich zu sein.

1) Historische Methode (Maxwell, Lang) Die fñhren Gleichungen so umformen  
dass schliesslich die Voraussetzung, hat Nachtheil, dass man von unrichtigen  
oder theilweise unrichtigen Voraussetzungen ausgeht und zu richtigen Fñhlern  
kommt. Nicht nicht so Unterschied hinein kommt. Dagegen Vorteil besteht

2) Als Specialfall cyclischer Systeme (Maxwell, Poldmann). Sehr elegant  
aber enthñlt natñrlich auch Hypothesen. Zu Wñhlen.

3) Einfach aufstellen und dadurch heraus dass Folgerungen richtig sind  
(Heaviside und Heaviside auch Heaviside). Letztere kñndet auch hauptsächlich  
Pardalleben des Lichts und magnetischen Erscheinungen. Allerdings wñre man nicht  
so es nicht vñlligst andere Gleichungssysteme geben wñre, welche auch dieselben  
Consequenzen ergeben. Die Historische Gleichungen wñren dies gewiss abschreckend,  
da man die Bedeutung derselben gar nicht abzuleiten kann, hier wo wir  
von anal. etc. schon etwas anschaulichere Begriffe haben wird dies nicht so schwer  
sein. Will versuchen, das nur einigermaßen planmñssig zu machen.



$$K \frac{de}{dt} + \frac{1}{4\pi} \nabla \cdot (\mathbf{e} - \mathbf{e}') = \text{curl } \mathbf{h}$$

$$\mu \frac{dh}{dt} = - \text{curl } \mathbf{e}$$

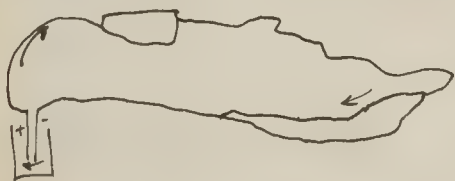
Wie schon früher gesagt, kann man diese Gleichungen nicht direkt aus den Versuchen herleiten, sondern ihre Begründung besteht darin, dass die Folgerungen, die daraus gezogen werden, mit der Natur übereinstimmen.

Doch plausibel kann man diese Gleichung machen:

Hypothese:

1). Es gibt ungeschlossene <sup>elektrische</sup> Ströme.

Die stationäre Stromung in Leitern ist das ja ein bekannter Erfahrungssatz, welcher auch in der alten Theorie stillschweigend angenommen war.



über in Platten, ~~in~~ <sup>in</sup> Räumkörpern  
als dass die Stromlinien wie ein Voltmeter benutztes  
Venn man irgendwo darüber einschaltet und  
so überall gleichen Strom erzeugen.

Das gilt aber nur für unvollkommene Leiter.

Wie nun in Dielektrika. Fortwährender Strom ist da nicht möglich.

Maxwell's Theorie ist nun, dass die sogenannten Verschiebungsströme mit den Leitungsströmen <sup>(begründet in Bezug auf magnetische Wirkung)</sup> ganz äquivalent sind, mit der dass zu denselben einfach addieren. Unter Verschiebungsstrom versteht man dabei die Änderung der dielektrischen Verschiebung mit der Zeit, oder wie man auch zu sagen pflegt die dielektrischen Polarisation. Ein direkter experimenteller Beweis lässt sich



und dafür nicht gut genug. Man plantel d. unter Annahme der Fluidums  
 Theorie. Dann kann man sich vorstellen, dass das elect. Fluidum in  
 den Leitern wie im Röhren unter <sup>und Reibung = prop. Kraft</sup> Überw. von Reibung strömt, wobei Wärme  
 entwickelt wird = Joule'sche Wärme. Sagen im Electr. ist fort dauernde Strömung  
 nicht möglich, da wie jedes Verhalten des Fluidums gleiches an durch  
 elastische Kräfte zurückgehalten. Es entfernt sich zwar unter ~~Annahme~~  
 Wirkung von elect. Kräften aus der Ruhelage um Stücke, welche prop. sind der  
 Kraft, aber nur endlich groß. Wenn nun Änderung der Kraft eintritt es auch  
 Änderung dieser elastischen Verhinderung also eine Bewegungsgrösse, welche  
 prop. ist  $\frac{de}{dt}$ , Strom =  $\frac{K}{\omega} \frac{de}{dt}$ .

~~Man~~ Ähnlich unter Annahme der Clausius-Mosotti'schen Hypoth. über die  
 Inductoren.



Wenn man durch Versuch mit einem Drahte entladen,  
 so strömt auch in den Kugeln die Elect. in durch Richtigkeit.

Diese Hypothese ist gewissermaßen ebenso wenig richtig  
 wie die naive Vorstellung von der <sup>electrischen</sup> zwei Fluiden, aber sie bietet doch eine  
 Fingersatz in dem Richt. experimentell in dieser Form nicht gut realisierbar, weil  
 in Wirklichkeit Wechselströme eintreten und deshalb schon keine magnetische  
 Wirkung erzeugt wird.

Hauptgrund: Richtigkeit der Folgerungen; insbesondere ist dies Recht wichtig  
 um elect. Schwingungen zu erklären.

~~Erklärung der Induktion~~

72 <sup>78</sup>  
 Wo also sowohl ein geladen. Leitfähigkeit besteht, als auch dichte. Verschiebung  $\epsilon$ ,  
 dort wird der Gesamtstrom  $= \frac{K}{4\pi} \frac{d\epsilon}{dt} + L(\epsilon - \epsilon') = c$

Da nun wir jetzt nur geschlossen Stromlinien so  $\text{div } c = 0$   
 also  $c = \text{curl eines Vektors}$

Was das für ein Vektor ist, stellt man leicht aus dem Gesetz des Elektronengastes

Unendliche geschlossene Strom Kraft  $\vec{h} = \frac{2c}{r_0}$   

$$2\pi h r_0 = \frac{4\pi c}{r_0} = \int h \, dr = \int \text{curl } h \, d\vec{f}$$
  

$$= 4\pi \int c \, dN$$

Da man nun die Gestalt des Integrationsgebietes beliebig wählen kann so folgt  
 wenn man ihn unendlich klein macht:

$\text{curl } h = 4\pi c$  Das gibt die erste Hauptgleichung.

2). Heaviside hat besonders darauf aufmerksam gemacht auf den Parallelismus  
 zwischen magnetischen und elektr. Kraft, etc.

Man könnte schon von vornherein erwarten dass eine ähnliche Stütz für  
 den Satz gilt. Aber der Unterschied, dass es keine magnetischen Leiter  
 gibt, daher auch keine wahren ~~z~~ negativen Massen. Während man auf  
 einer Metallkugel eine + Ladung anbringen kann, kann man nicht eine  
 + magnet. Masse isolieren, so dass sie dann andere + abstößt und andere - anzieht.

In der alten Theorie rechnet man zwar mit solchen Massen, aber es wird immer  
 ausgedrückt da gesagt, dass auch das Element für sich immer gleichviel + als -  
 an den beiden Enden habe; somit streng genommen es gibt gar keine +  
 magnetisch Raumdichte.  $\text{div } h = 0$  somit  $h$  oder richtiger  $\vec{h} = \text{curl}$

$\frac{4}{18}$  ~~Es~~ Noch genauer wird Gleichg bestimmt durch das Induktionsgesetz  
 In einem geschl. Stromkreis ändern sich Kraft = <sup>Änderung</sup> Änderung der Anzahl der  
~~Linien~~ <sup>Kraft</sup> Linien die durch den geschl. Kreis durchgehen. 20. Kreisformig:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{r} = \frac{d\Phi}{dt} \quad \Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = -\text{curl } \vec{E}$$

das ist in allgem. nur für Luft, sonst noch  
mit  $\mu$  zu multipl.  $\mu \frac{d\Phi}{dt} = -\text{curl } \vec{E}$

$$\mu \frac{d\Phi}{dt} = -\text{curl } \vec{E}$$

Der Unterschied ist einerseits das Vorzeichen, dann aber dass  $E = 0$  <sub>magn.</sub>

In diesen Gleichungen kommen ebenfalls noch zwei Energiegleichungen.

Allgemein gilt Energie geht ein als Produkt zweier Faktoren

Maxwell folgte wohl am meisten dem Bilde des elast. Zwanges, wo auch

Energie =  $\frac{E^2}{2} \int dV$   $E = \text{Elektr. Feldstärke} = \frac{f \cdot d}{z}$   $d = \frac{K}{4\pi} e$

ebenso auch hier  $= \frac{K}{8\pi} \int E^2 dV$  resp.  $= \frac{1}{2} \int \vec{E} \cdot \vec{D} dV$   $\vec{D} = \frac{K}{4\pi} \vec{E}$   
 elektrost. Energie neuer Vektor  $\vec{D}$  direkter. Vekt. Zwang

Also überall wo elekt. Kraft wirkt, entsteht eine  $\vec{D}$  und  $E = \frac{\text{Produkt}}{2}$

Analog magnetische Energie =  $\frac{\mu H^2}{8\pi}$

Also pro Volumen element, also Gesamt-Energie =  $\int \dots$  Dopp. in isolierten Körper!

Auch in der alten Theorie kommen ähnliche Ausdrücke vor.

Dies alles sollte nicht als Beweis gelten, sondern nur etwas plausibel machen,  
 Beweis besteht in den richtigen Folgerungen, die ich jetzt in Einzelnen kurz  
 durchrechnen werde.

# I. Statische Zustände

$$\text{curl } \mathbf{e} = 0$$

$$\text{curl } \mathbf{h} = 4\pi \mathbf{L} (\mathbf{e} - \mathbf{e}')$$

Da wollen wir <sup>erst</sup> noch ein Gesellschaft unternehmen, nämlich wo auch  $\mathbf{h} = 0$ .

$\mathbf{e}'$  die äußeren Kräfte werden auch  $\rightarrow 0$  vorausgesetzt

Es muss dann  $\mathbf{e}$  überall  $= 0$  sein, wo die Leitfähigkeit  $\mathbf{L} > 0$

kann dagegen unendliche Werte haben wo  $\mathbf{L} = 0$  also in Isolatoren.

Man kann das auch anders definieren: statische Zustände ohne Energieverbrauch.  
Folgt ~~ist~~ <sup>dann</sup> auch aus dem zweiten Gesetz; ~~und~~ Stromwärme =

$$Q = \int \mathbf{e} \cdot \mathbf{i} = \int \mathbf{L} \mathbf{e}^2$$

<sup>hier</sup> ~~hier~~ Diese beiden Definitionen kommen auf dasselbe hinaus, da die Entstehung eines  $\text{curl } \mathbf{h}$  eben mit Energieverbrauch verbunden ist. Also mit anderen Worten wir behandeln die Elektrostatik.

haben also nur  $\text{div } \mathbf{e} / 4\pi$ . Alle mit Anfangs- & Endpunkt

$$\text{Daher } \mathbf{e} = \nabla \int \frac{\text{div } \mathbf{e}}{4\pi r_0} d\tau \quad \text{wir nennen nun } \frac{\text{div } \mathbf{e}}{4\pi} = \rho_f =$$

$$\text{Raumladung der freien elektr. Masse} \quad \mathbf{e} = \nabla \int \frac{\rho_f}{r_0} d\tau$$

Dort wo  $K$  konstant ist, ist auch der früher erwähnte Vektor  $\mathbf{d}$  mit  $\mathbf{e}$  gleichgerichtet und denselben proportional.  
Es wird also dort auch ~~Widerstand~~ wirbelfrei verlaufen sein. An den Punkten wo  $K$  veränderlich ist, also  $\infty$  an den Grenzflächen zwischen zwei Medien mit verschiedenen  $K$ , gilt dies nun im Allgemeinen nicht mehr,



aber darauf kann ich hier nicht weiter eingehen, es werden dann im Allg. an diesen Stellen auch geschlossene d Linien vorkommen, aber für uns hat das kein Interesse, da uns nur der Teil von d angeht, der eine div. hat. Wir sehen also von den geschlossenen d Linien überhaupt ab und können dann auch setzen:

$$d = \nabla \int \frac{div d}{4\pi r_0} dv = \nabla \int \frac{\rho_v}{4\pi r_0} dv$$

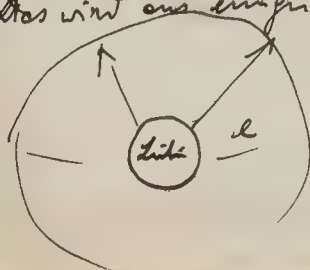
$$d = \frac{K}{4\pi} \nabla \varphi = \frac{K}{4\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

$$\rho_v = div d$$

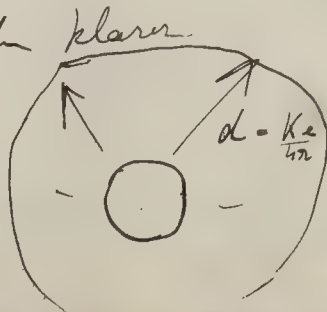
Also hat auch d ein scalares Potential auch d kann man von Nebenbedingungen ablesen, welche man in diesem Falle weder ableiten kann.

Welche von diesen Aussagen sind nun zureichend, welche man sonst für gewöhnlich als electr. Ladung zu berechnen pflegt. Oben war d und  $\epsilon$  ganz symmetrisch behandelt, es ~~war~~ ist also eigentlich willkürlich, welche Annahmen man definieren gebraucht. Maxwell, Heaviside etc. pflegen nun die gewöhnlich electr. Ladungen  $\rho_v$  zu berechnen. Das sind nämlich jene deren algebraische Summe  $= 0$  sein muss, da sie immer wie oben in der alten Theorie gesetzt wird, absolut positiv oder negativ ~~oder~~ erzeugt wird.

Das wird aus einigen Ansätzen klar.



ebenso



$$\rho_v = div d$$

Da nur die innen mit einem Kugel geladen so setzen wir an der Oberfläche

$$\text{curl } \mathbf{e} = 0$$

#

= P

19

$$4\pi L(\mathbf{e} - \mathbf{e}') = 0$$

$$\mathbf{e} = -\nabla \int \frac{\rho_f}{r_0} d\mathbf{r}$$

$$\rho_f = \frac{\text{div } \mathbf{e}}{4\pi}$$

Jetzt wo  $L = 0$  kann  $\mathbf{e}$  und  $\mathbf{d}$  von vornherein beliebig sein

$$K \frac{d}{dt} \text{div } \mathbf{e} + 4\pi L \text{div } \mathbf{e} = 0$$

wo  $L = 0$  kann  $\text{div } \mathbf{e}$  sich überhaupt nicht mehr ändern. Entsteht im Inneren von Isolatoren ein  $\text{div } \mathbf{e}$ , und durch  $\mathbf{d}$ , so stellt dies für immer festgesetzt. Für gewöhnlich betrachtet man den Fall, wo  $\text{div } \mathbf{d}$  in den Isolatoren  $= 0$  ist.

Jetzt wo  $L > 0$  muss  $\mathbf{e} = 0$

(wo  $L$  sehr groß, können nämlich die eigentlichen Richtungsänderungen auftreten)

Also in Isolatoren:  $\text{div } \mathbf{d} = \text{div } \mathbf{e} = 0$

$$\text{deshalb } \nabla^2 P = 0$$

in Leitern:

$$\mathbf{d} = \mathbf{e} = 0$$

$$P = \text{const.}$$

$$\nabla^2 P = 0$$

Nur an den Grenzflächen ist zwischen dem Leiter oder Isolator  $\text{div } \mathbf{e} \neq 0$

Doch ist  $\text{div } \mathbf{e} = 0$  Daraus folgt sofort, dass  $\mathbf{e}$  und  $\mathbf{d}$  auf den Leiteroberflächen

$\perp$  stehen müssen.

An Oberfläche:  $\text{div } \mathbf{e} d\mathbf{v} = (e_1, -e_2) d\mathbf{F}$

$$\text{div } \mathbf{d} d\mathbf{v} = (K_1 e_1 - K_2 e_2) d\mathbf{F}$$

$$\rho_f = \frac{1}{4\pi} \text{div } \mathbf{e} \quad \rho_f = \frac{e_1 - e_2}{4\pi}$$

$$\rho_w d\mathbf{v} = \sigma_w d\mathbf{F} \quad \sigma_w = K_1 e_1 - K_2 e_2$$

11). An Leiteroberflächen  $\sigma_f = \frac{e_1}{4\pi} = -\frac{\nabla P}{4\pi} = -\frac{\partial P}{\partial n}$

$$\sigma_w = -K_1 \frac{\partial P}{\partial n}$$

Wenn wir keine Leiter hätten so könnte man die  $\rho_w$  resp  $\rho_f$  beliebig annehmen, daraus beliebiges  $P$  und  $\mathbf{e}$  bilden und beliebiges  $\mathbf{e}$  und  $\mathbf{d}$  bekommen. Nun müssen aber die  $P$  die Bedingungen erfüllen, dass  $\nabla^2 P$  im Inneren der Leiter überall  $= 0$  ist also  $P = \text{constant}$ ; da ist die Verteilung von  $P$  nicht mehr willkürlich; es werden die  $\sigma$

<sup>13</sup> auf der Oberfläche bis auf Proportionalität unbestimmt bestimmt.

Es bildet das allgemeine Problem der Electrostatik: Aufspüren der Electricität Vertheilg.  
 könnte entweder  $\sigma$  ausgedrückt nehmen, damit  $P$  bilden etc. so dass, aber  
 dies wäre schwer durchzuführen. Man vermuthet in Symmetrie solche  $P$  zu finden  
 welche der Gleichg.  $\nabla^2 P = 0$  genügen und <sup>an</sup> ~~innerhalb der Leiter~~ <sup>der</sup> Leiter ~~innerhalb~~ <sup>der</sup> Leiter  
 constant werden; für das Innere der Leiter setzt man  $P = \text{const.}$  und findet  
 daraus  $\rho$ , also ~~erhält~~ <sup>erhält</sup>

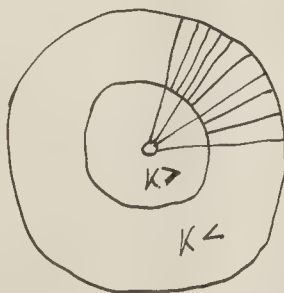
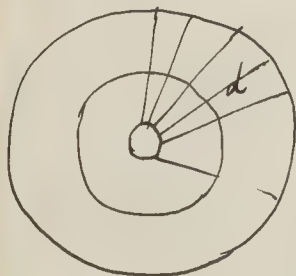
So entsteht die Aufgabe über Electricitätsvertheilg auf Kugeln, Ellipsoiden,  
Kugelschalen etc. etc.

Dies betrifft die  $\sigma$  und die Vertheilg.

Zweite Aufgabe die konstanten Käfte zu finden:

!

die Ladungen  $\rho_w$  ebenso auch die  $\rho_f$  das macht kein Unterschied 75  $\frac{2}{10}$   
 wenn die Radius variabel  $\frac{3}{10}$



$$d = \frac{K_e}{u_n} = \text{const}$$

die nehmen von Gl. 1; in Zsh.  
 kann keine sehr kleine Ladung erzeugt  
 jetzt sitzen auch offene

Ladungen auf der Grenzfläche

So sieht man dass dies rein

fictive Rechnungs ausdrücke sind, denn ~~von~~ von der Grenzfläche kann man  
 keine Elctz erzeugen, da sich keine dort befindet, man hat auch keine  
 hinführt. Der Nutzen dieser Feststellung erst durch Anwendung auf

Coulomb's Gesetz.

Berechnen nämlich die Gesamt Energie:  $\frac{1}{2} \iint \epsilon \cdot d \cdot d$  der  
 mit Hilfe des Green'schen Satzes

$$\iint \epsilon \cdot \nabla \phi \cdot d\mathbf{f} = \iint \text{div } \mathbf{a} \cdot d\mathbf{v}$$

Stellt  $\mathbf{a}$  setzen wir jetzt ein Product ~~a = b \cdot c~~  $\mathbf{a} = \mathbf{b} \cdot m \cdot \mathbf{b}$

$$\text{div } \mathbf{a} = \frac{\partial}{\partial x}(b_1 c_1) + \frac{\partial}{\partial y}(b_2 c_2) + \frac{\partial}{\partial z}(b_3 c_3) =$$

$$= b_1 \frac{\partial c_1}{\partial x} + b_2 \frac{\partial c_2}{\partial y} + b_3 \frac{\partial c_3}{\partial z} + c_1 \frac{\partial b_1}{\partial x} + c_2 \frac{\partial b_2}{\partial y} + c_3 \frac{\partial b_3}{\partial z}$$

$$\text{div } m \cdot \mathbf{b} = \frac{\partial}{\partial x} m b_1 + \frac{\partial}{\partial y} m b_2 + \frac{\partial}{\partial z} m b_3 =$$

$$= b_1 \frac{\partial m}{\partial x} + b_2 \frac{\partial m}{\partial y} + b_3 \frac{\partial m}{\partial z} + m \left( \frac{\partial b_1}{\partial x} + \frac{\partial b_2}{\partial y} + \frac{\partial b_3}{\partial z} \right)$$

$$= \int b \cdot \nabla m + m \text{ div } \mathbf{b}$$



Setzt man wie  $m = P$   $b = \nabla \varphi$

Dann wird:

$$\operatorname{div}(P \nabla \varphi) = \nabla P \nabla \varphi + P \nabla^2 \varphi$$

mit Greensche Satz:

$$\iiint dv \nabla P \nabla \varphi + \iint P \nabla^2 \varphi dF = \iint P \nabla \varphi N dF$$

$$P = \int \frac{\rho_f}{r_0} dv \parallel e = \nabla P$$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\rho_v}{r_0} dv \parallel d = \nabla \varphi$$

$$\iint e d dv + \iint P \operatorname{div} d dv = \iint \underbrace{N \cdot P \cdot d}_{\rightarrow \text{Wenn Fläche im } \infty \text{ Entfernung}} dF$$

$$\text{also } T = \frac{1}{2} \iint N e d dv = \frac{1}{2} \iint P \operatorname{div} d dv$$

$$= \frac{1}{2} \iint P \rho_v dv = \frac{1}{2} \int \rho_v dv \int \frac{\rho_f}{r_0} dv = \frac{1}{2} \int \frac{\rho_v \rho_f}{r_0} dv$$

Man kann natürlich die Integrationsfolge auch umkehren und sagen.

$$= \frac{1}{2} \int \varphi \rho_f dv =$$

Setzt Änderung von  $T$  bei Verschiebung des Körpers von zwei Körpern

wobei nur ein Element von  $d\rho_v = \operatorname{div} dF$   
 $= \frac{dF}{dv} = \frac{K}{4\pi} \frac{e}{r^2}$   
 $\rho_f = \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} e = \frac{e}{4\pi}$   
 $\rho_v = K \rho_f$

$$T = \frac{1}{2K} \int \frac{\rho_v^2}{r_0} dv$$

$$\frac{dT}{dr} = \frac{1}{2K} \int \frac{\rho_u^2}{r_0^2} dF = \frac{1}{2K} \int \frac{\rho_u^2}{r_0^2} dF = e$$

$$T = \frac{1}{2} \int \rho_u dr \int \frac{\rho_f}{r_0} dr = T_1 + T_2 + T_{12} + T_{21}$$

$$-\frac{dT}{dr} = \frac{1}{2} \int \rho_{1u} dr \int \frac{\rho_{2f}}{r_0^2} dr + \frac{1}{2} \int \rho_{2u} dr \int \frac{\rho_{1f}}{r_0^2} dr$$

$$= \frac{1}{2} m_{1u} \frac{m_{2f}}{r_0^2} + \frac{1}{2} m_{2u} \frac{m_{1f}}{r_0^2} = \frac{m_{1f} m_{2u}}{r_0^2} =$$

$$= K \frac{m_{1f} m_{2f}}{r_0^2} = \frac{m_{1u} m_{2u}}{K r_0^2}$$

Voraussetz. dass die Energiehdy  
nur auf die mechanische fñhrt

das  $\int \frac{\rho_f}{r_0}$  ist das gewöhnliche elektr. Potential

dagegen für die gewöhnliche elektr. Masse

also wenn wahre Ladung <sup>ist</sup>, dann im Körper mit gewöhnl. K ist die  
ponderom. Kraft im Verhältnis K kleiner; wenn dagegen im solchen  
Körper auf bestimmtes Pot. gebracht so im Verh. K größer.

Also könnte auch hier Elektrostatische in gewöhnliche Weise entwickelt werden; Vorth. ist  
dass man auch ohne weiteres die Wirkg. freier elektr. Massen einsehen, was sonst  
~~man~~ nur durch sehr complicirte gekünstelte Theorien. Wirkg. elektr. Felder  
auf Isolatoren mit anderen K!

Sehr bemerkenswert, dass hier das Coulomb'sche Gesetz nur durch das Energieff.  
aus der Max. v. St. folgt, es ist gar nicht nöthig anzunehmen, dass e eine Kraft  
im mechanischen Sinne ist, denn e besitzt keine mechanische Masse (wie noch Hertz  
annimmt), sondern irgend eine Vectorgrö., ebenso wie d, so dass Pot = Energie. (Vollk. ist jetzt eine  
verborgene Sachverh.)



Hand

27  
7  
19  
2  
20

Beim Magn. tritt ferner der merkwürdige Umstand auf, dass  $\mu < 1$  sein kann (diamagnetisch). Keine Unterschied gegen Dielektr. Isolanten, welche  $> 1$  <sup>und für feste Körper  $> 2$</sup>  sein scheint. Dabei auch keine Durchdringung von K. röhrenförmige Kanäle aber noch nicht festgestellt.

Trotzdem also die Nerv. Str. für diesen Körper nicht streng gelte, erachtet es doch bedenklich die Fortsetzung von wahren Magnetismus anzunehmen, denn es zeigt sich ja auch in der Praxis, dass man nicht ein + Polteil isolieren kann wie + Elektro.

Erklärung dieses Verhaltens: Ampère's Molekularströme.

Feyßel ist zwar sehr heftig dagegen, aber es scheint mir doch dass er viel zu weit geht. Würde alles auf elektromagnetische Stromwirkung zurückzuführen. (Ebenso wenig: <sup>von Laplace</sup> magnetisch weiche und harte Körper)

Also ~~lassen wir uns~~ <sup>lassen wir uns</sup> die magnetischen Werkzeuge für später.

Elektrostatische Felder mit  $z'$ .

Wenn  $h \geq 0$ , aber  $\frac{dh}{dt} = 0$ :

$$\text{curl } e = 0$$

$$+ \nabla \cdot (e - e') = \text{curl } h$$

Dal wo  $L = 0$ , muss die  $e$  ~~ist~~ constant sein, denn  $\frac{d}{dt} \text{div } d = 0$  wäre es in der Isolator  $\leq 0$  so könnte man dies als elektrost. Kräfte behandeln



2. Also können wir voraussetzen dass  $e=0$  in  $Z$  ist.

in  $Z$  ist es ebenfalls  $=0$  sein, ~~W~~ wenigstens dort wo kein  $e'$  auftritt, weil  $\frac{e}{\text{unb}}$  curl h.

Da haben wir also auch  $e=0$  überall

und dass  $e=0$  überall außer den Stellen wo  $e' \geq 0$

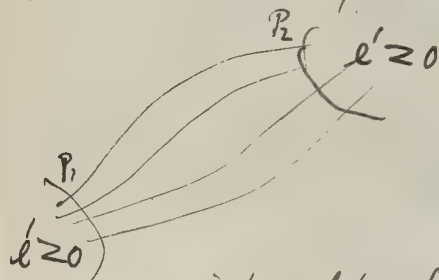
Wenn sonst kein  $e'$  Stellen wären so wäre überall  $e=0$ .

Betrachten wir die Stellen wo  $e'=0$  dort

curl  $e=0$  das  $e=0$   $e=VP$

$$\nabla^2 p = 0$$

Also Stromlinien, die <sup>innerhalb des Raumes</sup> nicht geschlossen sind nicht abgeschlossen



Gewöhnliche Potentialfunktion

$$e = \frac{\partial T}{\partial s}$$

in jeder solchen Stromlinie fließt gleichviel derjenige Länge nach

Wenn zwei von versch. Querschnitt & versch. Länge so notwendig prop.  $l$  und  $\frac{1}{L_2}$ .

Jetzt unter Voraussetzung, dass dem viel Arbeit als die von mechanische Arbeit zu verrichten bringen der Länge von  $ds$   $e$  ist  $e = \int e^2 ds$

$$e \text{ ist } e = \int e^2 ds$$

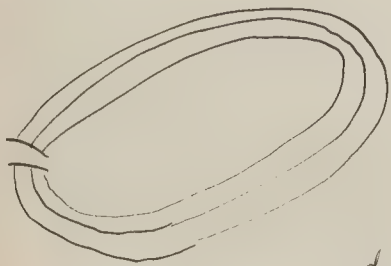
~~der~~ Magnetismus: Abh. von elektr. Strömen

Schwupf in der Maxwell'schen Theorie sehr zu vermeiden, da es keinen vollen N. gibt. Man könnte das besser ausdrücken wie die Elektrostatik, indem man  $\epsilon=0$  setzt, aber da gibt es eigentlich nicht viel Neues zu sagen.

Freier Magnetismus besteht an Grenzflächen mit Verschiebung  $\mu$ , das wäre also die  $k$  sein, dagegen die  $b$  überall  $=0$ . Da es wohl magnetische Verschiebungsströme nicht aber magnetische Leitungsströme gibt.

~~Der~~ Abfall wo  $\epsilon=0$  ist auch  $\nabla \times \mathbf{e} = \frac{1}{c} \frac{d\mathbf{P}}{dt}$   ~~$\nabla \times \mathbf{e} = 0$~~   $\nabla \cdot \mathbf{e} = 0$

Für die Stellen könnte man also  $\mathbf{e} = \nabla P$   $\nabla^2 P = 0$  setzen wenn man den Werth von  $\nabla \times \mathbf{e}$  resp  $\nabla \cdot \mathbf{e}$  auch an den Stellen wo  $\epsilon \neq 0$  ist, wissen würde, könnte man für  $\mathbf{e}$  einen allgemeinen Ausdruck aufstellen. Über jene Stellen (Thermoelektr., galvan. El., etc.) wissen wir aber nichts, daher pflegt man sich überhaupt von der Betrachtung auszuschließen.



Hierbesigliche Spindelstrom in Voltmeter

Es genügt für die praktische Zwecke des Verhältnisses von  $\mathbf{e}$  in übrige Räume zu wissen. In den freigelegten Schichten kann man ablesen

$\nabla \cdot \mathbf{e}$  annehmen oder  $\nabla \times \mathbf{e}$   
(Helmholtz) herausde.

In übrige  $\nabla^2 P = 0$ , denn natürlich Sprung an der Grenzfläche



$\nabla \frac{1}{r}$  bedeutet also Kraft nach  $\frac{1}{r^2}$  in Richtung des Vektors  
daher in  $\nabla$  Kraft  $\perp$  auf Element und Verdrängungslinie  
= Rist Lorentz'sches Gesetz.

Natürlich ist eine solche Verteilung eigentlich uninteressant, da man  
man immer ganze geschlossene Stromleiter kennen, integriert kommt das richtig  
heraus.

Wenn die Stromen nicht linear so gilt ebenso  
 $= + \int \nabla \cdot \left( \frac{1}{r^2} \right) d\tau$

$$h = \oint \nabla \times \mathbf{A} d\mathbf{s} - \int \frac{1}{r^2} \nabla \times \mathbf{r} d\tau = \text{curl } \mathbf{a}$$

$$\mathbf{a} = \int \frac{\mathbf{c}}{r^2} d\tau$$

Das gilt auch allgemein, wenn unter  $\mathbf{c}$  der ganze Strom  $= L\mathbf{c} + \frac{K}{4\pi} \frac{d\mathbf{c}}{dt}$   
verstanden wird.

Im Allgemeinen spielen wir mit linearen Stromleitern; im übrigen Raum  
ist  $L=0$  daher  $\text{curl } h=0$ , also wird  $h$  beschränkt auf  $\mathbf{A}$  Drähte.

Anschließend ist  $\text{curl } h=0$  und die  $L=0$

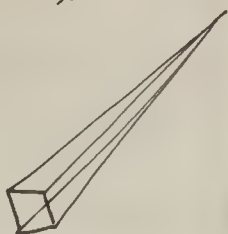
Also könnte man daran denken, anschließend der Drähte  $\mathbf{A}$  derhalb im  
skalaren Potential aufzufinden so dass  $\mathbf{A} = -\nabla P$ . Dies ist fast die  
von Ostrogradsky übliche Methode. Darauf kann man kommen, indem man  
das  $\int$  <sup>divergiert</sup> transformiert oder durch folgende mehr geometrische Überlegung.

$$\begin{aligned} \int \nabla P d\mathbf{r} &= \text{Arbeit bei Verdrängung} = \int \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} \int \frac{\nabla \cdot \mathbf{A}}{r^3} d\mathbf{r} = \\ &= \int \int \frac{\mathbf{r}}{r^3} \cdot \nabla d\mathbf{r} d\mathbf{s} \end{aligned}$$





$$\int r^2 V d\Omega dr = \text{Vol.}$$



$$\frac{1}{2} \text{Vol} = \text{Fläche} \perp$$

$$\frac{1}{2} \text{Vol} = \frac{\text{Fläche} \perp}{r^2} = \text{Sinnthwinkel } d\Omega$$

Somit  $\int \nabla P dr = \int d\Omega = \int d\omega$

wo  $\omega =$  Sinnthwinkel unter welchem die ganze Curve erscheint

Daraus folgt:  $P = \int \omega$

Natürlich kann man  $\omega$  ebenso in vorher wieder zur Transformation

$$\omega = \int \frac{r^2}{r_0^3} V d\Omega dr = \int \frac{N r^2}{r_0^3} dF = \int dF \frac{\partial(\frac{1}{2})}{\partial r}$$

also  $P = \int dF \frac{\partial(\frac{1}{2})}{\partial r}$

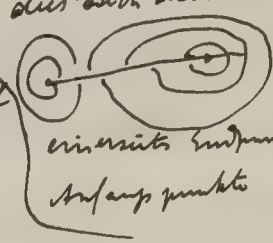
Daraus folgen zwei Interpretationen von P:

Gerichtswinkel ...

magnet. Doppelschicht ~~oder~~ (Schale), welche von der Stromänderung begrenzt wird

Wuth durch den quereller Lapp ganz unabhängig vom Wirbel steht müsste man natürlich einmal durch die Schale hindurch gehen; dies <sup>ist</sup> auch das Verhalten der ~~in Linien wieder~~

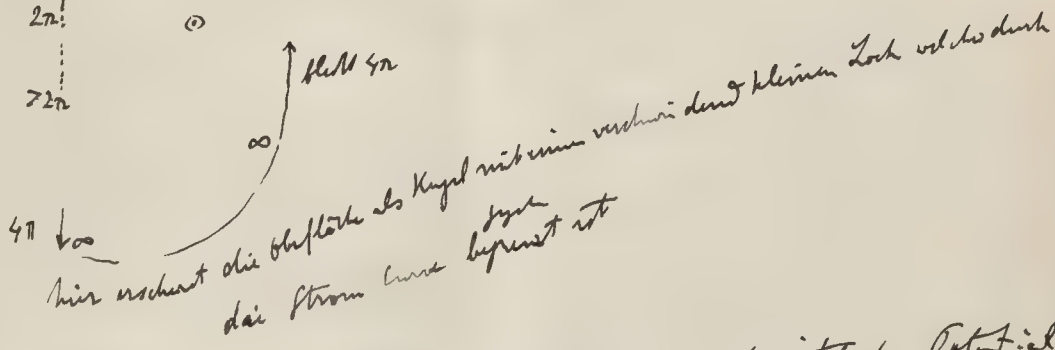
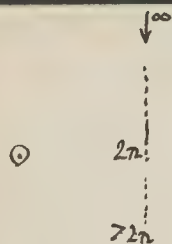
↑ Dies dient am besten zur Veranschaulichung  
Fläche gleich  $\omega =$  magnet. Flächen



einseitige Endpunkte, andere Anfangspunkte



(positiv ~~so~~ gerichtet, wenn der Strom im Uhrzeigersinn fließt)

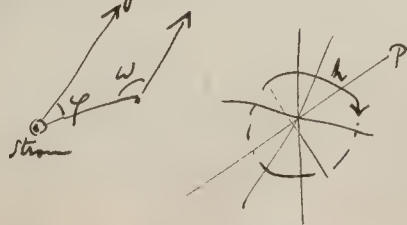


Wenn man dann wieder am selben Weg herkommt, ist jetzt das Potential um  $4\pi$  gewachsen, also vollständig  $w \pm n 4\pi$ . Dies zeigt aber dass das  $P$  in diesem Fall keine wirklich reelle physikalische Größe sein kann, sondern nur ein Rechenbehelf, ein Surrogat von dem Vektorpotential zu ersetzen.

Es gilt natürlich nur solange der Punkt nicht in den Strom selber hinein rückt, dort ist ein unklarer Fall, dort kann man mit  $P$  überhaupt nicht umgehen (also in körperlichen Leitern) dies gilt nur darin zu erkennen, dass sowohl  $w$  für diesen Fall unbestimmt wird, als auch die Doppelbeziehung.

Somit pflegt man mit dem  $\infty$  lauge geradlinigen Ströme zu beginnen. Eigentlich keine Linie, denn muss wieder geschlossen sein.

Schneidet sie irgendwo im  $\infty$ ;  $w = 2\pi - \varphi \pm 4\pi n$



$\frac{4}{21}$ 

Energie des magnetischen Feldes

$$T = \frac{1}{8\pi} \int b \cdot h \, dv = \frac{1}{8\pi} \int b \, \text{curl} \, a \, dv$$

kann transformiert werden.

Dazu braucht man Satz:  $\text{div} \, Vab = \sum b \, \text{curl} \, a - \sum a \, \text{curl} \, b$ 

$$\text{div} \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \frac{\partial}{\partial x} (a_2 b_3 - a_3 b_2) + \frac{\partial}{\partial y} (a_3 b_1 - a_1 b_3) + \frac{\partial}{\partial z} (a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

$$= a_2 \frac{\partial b_3}{\partial x} - a_3 \frac{\partial b_2}{\partial x} + a_3 \frac{\partial b_1}{\partial y} - a_1 \frac{\partial b_3}{\partial y} + a_1 \frac{\partial b_2}{\partial z} - a_2 \frac{\partial b_1}{\partial z} \dots$$

$$= \text{obj}$$

$$8\pi T = \int dv \, \sum a \, \text{curl} \, b + \underbrace{\int dv \, \text{div} \, Vab}_{=0}$$

$$= \mu \int dv \, \sum a \, \text{curl} \, h = 4\pi \mu \int dv \, \sum a \, c$$

$$T = \frac{\mu}{2} \int \sum a \, c \, dv \quad \text{für beiden Leiter} = \frac{\mu}{2} I \int \sum a \, ds$$

$$a = I' \frac{ds}{r}$$

$$T = \frac{\mu}{2} I I' \int \frac{\sum ds \, ds'}{r_{12}}$$

kann zerlegt werden in (von 2 Stromleitungen)

$$= \frac{\mu}{2} \left[ I_1^2 \int \frac{ds_1 \, ds'_1}{r_{01}} + I_1 I_2 \int \frac{ds_1 \, ds'_2}{r_{012}} + I_1 I_2 \int \frac{ds_2 \, ds'_1}{r_{012}} + I_2^2 \int \frac{ds_2 \, ds'_2}{r_{02}} \right]$$

$$T = \mu \left[ I_1^2 \frac{C_1}{2} + I_1 I_2 C_{12} + I_2^2 \frac{C_2}{2} \right]$$

Selbst Induktions Coeff. und Coeff. der wechselseitigen Induction  
werden somit geschrieben

$$\int \frac{S ds ds'}{r_0} = \int \frac{ds ds' \cos \epsilon}{r_0}$$

Also Änderung dieses Ausdruckes gibt die Energieänderung, also die geleistete  
Arbeit, und daraus ergibt sich die vom Strom geleistete Arbeit, und das ist so zu verstehen  
als was in einem

Nach der alten Theorie kommt man zu demselben Ausdruck auf

folgende Weise; Potentiell einer Kreisstrom  $= iW = i \times$  Anzahl der Keopflin  
welche von Punkt ausgehen

~~oder Doppelschicht mit Magnetismus  $i$  belegt~~

Andere Strom  $i'W'$ ; ein magnet. Pol ist in der ersten Schicht hat dann

Energie  $i i' W$  also im Ganzen: äquivalent mit Arbeit welche  
beiderseits mit  $i'$  belegt ist; ein solches Theilchen hat Energie  $i i'$  Anzahl der  
Keopflin des Polbogens  $i'$  also in ganzen

$i \times$  Anzahl der Keopflin des Stromes  $i'$  durch Strom  $i$

$$\text{also } i \int S N h dt = i \int S N \cos \epsilon dt = i \int S a ds = i i' \int \frac{S ds ds'}{2}$$



Veränderliche Zustände, In der Natur.

# Induktion

82

1/22

Elektronen Kräfte welche induziert werden durch Veränderung des mag. Feldes  
~~Körner~~ <sup>Geben</sup> mit nur zu erkennen als Strom in geschlossenen Leitern

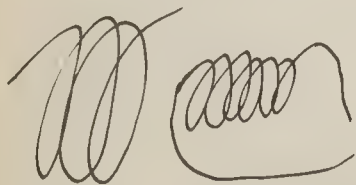
$$\begin{aligned} \int \vec{E} \cdot d\vec{s} &= \int \vec{N} \cdot d\vec{s} \\ &= -\mu \int \vec{N} \frac{dh}{dt} dt = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \int \vec{N} h d\vec{s} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \int \vec{N} \cdot d\vec{s} \\ &= -\mu \frac{\partial}{\partial t} \int \vec{a} \cdot d\vec{s} \quad e = i \int \frac{ds}{r} \\ &= -\mu \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{ds}{r} \cdot i \right) \end{aligned}$$

= Änderung der Feld der Kraftlinien = ~~in~~ Änderung des Selbst Z.C.  $\times i$

über endl. Leit. integriert = durchgeflossenen El. Str.-Menge  $\cdot r$

$$= \mu (i' M'_{12} - i M_{12})$$

Im allgemeinen Beziehung dieser Coeff. zueinander abhängig, <sup>(besonders auf</sup>  
 also vermischt bei Änderung des Abstandes <sup>abhängig)</sup>



je näher alles beieinander  
 und je länger ~~ist~~

Funkeninductor  
 Transformatoren

Erfahrung, theoretisch dass dies auch gilt, falls die Änderung des  
 magnetischen Feldes nicht in Folge Änderung der Stromstärke im  
 induzierenden Leiter sondern in Folge Änderung von  $M$ , also Änderung der  
 Lage der infolge Bewegung eintritt.

Selbstinduktion: Anwachsen des Stromes, dann noch fort dauern mit noch mag. Kraftlinien  
 im Felde sind. Vollständig  $i, r_1 + \frac{d}{dt}(C_{11} i_1) = -\frac{d}{dt}(C_{12} i_2)$

$$= E$$

Dynamoschienen

<sup>22</sup>  
Ebenso ist auch die ponderomotorische Arbeit gegeben durch die Änderung  
des ~~Elektr.~~ Ausdrucks:  $i i' M$

also  $M$  in allg. f. ( $\propto \gamma^2 \propto \rho \gamma$ )

Kraft in ---  $i i' \frac{\partial M}{\partial x}$  --  $\frac{\partial M}{\partial x}$  etc.

~~Wiederum~~ Um sich die Richtg. der Kraft zu ~~ver-~~ merken: suchen sich  
immer so zu stellen dass die Anzahl der Kraftlinien am grössten wird.  
Dabei aber eigenthümlicher Umstand:

Also wenn  $M$ . Kraftlinien Zahl abnimmt = + Strom ~~ist~~ welchen  
Stromkreis erzeugt dem ~~Grösst~~  $i i' dM$

Wohi muss aber auch von aussen ebensoviel mechanische Arbeit  
geliefert werden  $i i' dM$ ; es müssen also die Batterien geben  
die doppelte <sup>Rein-</sup> Arbeit leisten  $i i' dM$ ; wozu die Verluste des  
magn. Feldes, wie auch die Stromwärme geht auf Kosten der  
Batterien.

Helmholts Erhaltung der Kraft

Darauf kann hier nicht näher eingegangen werden, wir ~~haben~~ können uns  
mit Elektrizität nur insoweit befassen als sie uns ~~als~~ als ~~Abkühlung~~  
unserer Rechnung besonders interessant.

# Eigenthümliche Theorie über Einwirkung von Vortriebs

83 3/22

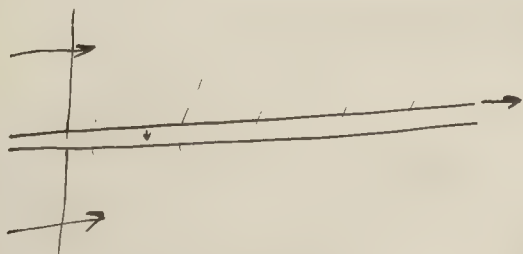
$$K \frac{de}{dt} + 4\pi L(e-e') = \text{curl } h \quad \left| \begin{array}{l} e \\ h \end{array} \right.$$

$$T = \frac{K e^2}{8\pi}$$

$$\mu \frac{dh}{dt} = -\text{curl } e \quad \left| \begin{array}{l} e \\ h \end{array} \right. + h$$

$$+ \frac{\mu h^2}{8\pi}$$

$$e \text{ curl } h - h \text{ curl } e = \text{div } V h e = \frac{d}{dt} T$$



deraus hat Vortriebs, das aber  
dann überhaupt die Energie ein  
strömung  $V h e$  bildet

Daher ist natürlich noch ein beliebiger curl dazugehen!

Also ist dies natürlich nur eine Hypothese, welche dem gut der  
Hypothese in der alten Theorie sagt, wo das Dielektrikum nur eine rein  
passive Rolle hatte.

Das Induktionsgesetz haben wir vorher schon auf bewegte Körper  
angewendet, auf Erscheinungen die bei Lageränderungen der Körper eintreten.  
Es ist natürlich nur als Annäherung gültig da unsere Gleichungen nur  
für ruhende Körper aufgestellt sind, ~~und wären~~ welche allerdings recht  
gut stimmen, soweit unsere Erfahrung geht.

Hätte u.a. Gleichungen für bewegte Medien } nur hypothetisch  
2 Thomson Recent Remarks } unter Annahme eines  
mit der Materie sehr verbundenen ~~substantiellen~~ Äthers



<sup>4</sup>/<sub>23</sub> so dass die Kraftlinien mitgeführt werden.

Wien, Lorentz, Freg immer mit Äther.

Li Atherton.

Nach Hertz, Maxwell etc.: magnetische Wirkung von Conventionsström  
Rouland, (Zeller-), Röntgen, Alfred Bernstein Rowland.

Capitel welches nur in Maxwell'sche Theorie vorkommt  
Elektrische Wellen

$$K \frac{de}{dt} = \text{curl } h \quad \left| \frac{\partial}{\partial t} \right.$$

$$\mu K \frac{dh}{dt} = -\text{curl } e$$

$$\mu \frac{dh}{dt} = -\text{curl } e \quad \left| \text{curl} \right.$$

$$= -\nabla \text{div } e + \nabla^2 e$$

$$= \nabla^2 e$$

$$e = f \cos\left(\frac{x}{\lambda} + \frac{t}{T}\right)$$

div e = 0 also keine Longitudinal  
nur Transversal wellen

$$\mu K \frac{d^2 e}{dt^2} =$$

$$f = f_1 i + f_2 j + f_3 k$$

$$\nabla^2 e = -\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 e \cos \dots$$

$$\left\{ \frac{1}{\lambda^2} = \frac{K\mu}{c^2} \quad \lambda = c \sqrt{\frac{1}{K\mu}} \right.$$

$$\frac{d^2 e}{dt^2} = -\frac{2\pi}{T} e$$

$$\frac{de}{dt} = -\frac{2\pi}{T} f \sin\left(\frac{x}{\lambda} + \frac{t}{T}\right) = \frac{de}{dx} \frac{dx}{dt}$$

$$-\frac{2\pi}{\lambda} f \sin \quad \left\| \right. = \frac{2}{T} = \sqrt{\frac{1}{K\mu}}$$

$$\frac{V}{V'} = \sqrt{\mu'K'} = n = \sqrt{K} \quad \text{Druck Eq.} = \sqrt{K}$$

$$V^2 h = - \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right) h \omega - \cancel{h = g \cos 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} + \frac{t}{T} \right) \text{ (WV)}}$$

84  $\frac{1}{23}$

$$e = i f_1 \cos 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} + \frac{t}{T} \right) \quad \text{div } e = 0$$

$$+ i f_2 \cos 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} + \frac{t}{T} \right) = f_1 \dots \rightarrow 0$$

$$+ k f_3 \cos 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} + \frac{t}{T} \right) \quad f_1 = 0$$

Also Richtg.  $e \perp x$  Transversalwellen das ist unmittelbar  
evident aus dem Begriff  $\text{div} = 0$

$$\text{Ebene } h \quad K \frac{dh}{dt} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ g_1 & g_2 & g_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} \quad h = j g_2 \cos \dots + k g_3 \cos \dots$$

$$- K \frac{2\pi}{T} \left[ j f_2 \sin 2\pi \dots + k f_3 \sin \dots \right] = j g_2 \frac{2\pi}{\lambda} \sin + k g_3 \frac{2\pi}{\lambda} \sin$$

$$f_2 \cdot \frac{K}{T} = g_2 \frac{1}{\lambda}$$

also  $e$  und  $h \perp$  aufeinander

Hätten darüber erhalten wenn die Wellen von  $e$  in die zweite  
Gleichung eingesetzt und integriert w. wär.

Also wenn Fortpfl.  $\sim$  in  $x$  so  $e$  in  $y$   $h$  in  $z$

Transversale Wellen, welche mit Geschw.  $\frac{1}{\mu} = 3 \cdot 10^{10}$  fortgeschw.

Auf verschied. Methoden herausgekommen, somit  $\sqrt{\epsilon \mu}$   
= Lichtgeschw. , Elektromagn. Lichttheorie, wenn man Äther als  
elast. Medium auffasst so erhält man auch Wellenbewegungen aber

1. Schwierigkeit die enorme Elastizität
2. Die Nichtexistenz von longitudinalen Wellen

insbesondere müssten solche auftreten bei Reflexion an Trennungsoberflächen

Sind aber noch nie beobachtet worden und was noch bedenklicher ist, ~~so~~ sie müssten sich dadurch zu erkennen geben, dass Energie der  $\text{H}_2$  und des  $\text{H}_2$  < empf. ist.

Um dies zu umgehen hat man ganz eigenthümliche Constructionen des Äthers erdacht d. Thomson's quessirogen Äther etc.

Hier fallen alle diese Schwierigkeiten fort.

3).  $VK = n$  der Erichson's stimmt das wohl meist überein

$n = \text{cca } 1.5$        $K = \text{cca } 2$       Paraff, Oel, Schmelz etc.

Genau kann das natürlich nicht stimmen, denn es ist ja keine Constante, Abhängig von Wellenlänge und ebenso hat sich gezeigt, dass  $K$  Abhängig ist von der  $\text{H}_2$ , wie es gemessen wird, ob bei constant wirkender elektr. Kraft, oder bei raschen Schwingungen besonders auffallend bei manchen Electrolyten, wo ausserdem noch Leitungs fähigkeit vorhanden ist. Es ist aber die Theorie in dieser Form noch nicht vollständig; um die Dispersion zu ~~erklären~~ berücksichtigen, müssten die Eigenschaften der Materie berücksichtigt werden, ebenso wie bei der vorigen Theorie, dass das gilt ja eigentlich selbst für ideale Dielectrica.

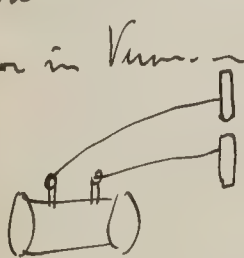
Recht augenscheinliche Beweise für die EMLT liefert aber erst  
die Versuche von Hertz, welche <sup>zugleich</sup> den ganzen alten Theorien den  
Garaus machten indem sie bewiesen, dass die Em Koff Zeit  
braucht um sich fortzupflanzen

Elektr. Schwingungen  
Langsame Wechselströme, Funkeninduktion, Tesla Ströme  
 $n = 10^5$ , Leydnerfl. Entladungen  $n = 10^6$ , <sup>Theoretisch zu hoch und</sup> nachweisbar mittels  
rotirenden Spiegel

~~Durch Fort~~ Die sind immer noch verhältnismäßig langsam

Wellenlänge =  $10^4$

Aber durch Verkürzung der Capazität und Erhöhung der Frequenz  
Hertz schaffte Wellen von etwa  $10^9$  zu erzeugen, welche also  
schon im Vmm.



verschieden Form

Dass dies wirklich eine Wellenbewegung ist, folgt am deutlichsten aus  
der Existenz von stehenden Wellen

bei Reflexion von Metallwänden von Drahtenden etc. Knotenpunkte



Das ist gleichbedeutend damit dass Licht unpolarisirt ist nur sehr ausreicht. Durch Vorklärung des Lsg. etc. und Einfließen der Resonator etc. ist man schon bis auf  $\lambda$  von wenigen nm Wellenlängen gekommen während andererseits die Lichtwellen durch das ultraviolette Ende hindurch bis zu  $\lambda = 50-60 \mu\mu =$

$0.05 \text{ mm}$  verfolgt werden sind, allerdings scheint es jetzt kaum mehr möglich von dem Ende noch viel weiter vorzudringen.

Natürlich mannigfache Variationen der Versuche: Nachweis durch Erdbe-Röhren, Polometer, mechanische Werke, Coherer, Directen Zähler etc.

Der Theil-Nachweis mit Lichtwellen wurde am auffallendsten durch Versuche über Reflexion, Brechung (Linsen, Prismen von Fed. etc.) bei den gewöhnlichen Erregern nicht zu polarisirt, Nachweis: Erster von Nutall dreht. Nutall sind nämlich absolut un durchdringend während Isotrope durchdringend sind.

Zu Halbleitern:

$$\left. \begin{aligned} K \frac{d\epsilon}{dt} + 4\pi L \epsilon &= \text{curl } h \\ \mu \frac{dh}{dt} &= -\text{curl } e \end{aligned} \right| \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} \\ \text{curl} \end{array}$$

$$K \frac{d^2 \epsilon}{dt^2} + 4\pi L \frac{d\epsilon}{dt} = \nabla^2 e$$

} Eine solche Diff. Gleichg ist charakteristisch für periodische Vorgänge in absorbirenden Medien

Abklingen in absorbirenden Medien

$$e = f e^{-\alpha x} \cos\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

$$\frac{\partial e}{\partial x} = -\alpha e + \frac{1}{\lambda} f e^{\alpha x} \sin \dots$$

$$\frac{\partial^2 e}{\partial x^2} = \alpha^2 e + \frac{4\pi\alpha}{\lambda} f e^{\alpha x} \sin + \frac{4\pi^2}{\lambda^2} f e^{\alpha x} \cos$$

Die analog für  $h$  abgeleitet mit Phasendifferenz!

$$\left. \begin{aligned} \alpha^2 - \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 + K_{\mu} \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 &= 0 \\ 2\alpha \tau &= 4\pi K_{\mu} \tau \end{aligned} \right\}$$

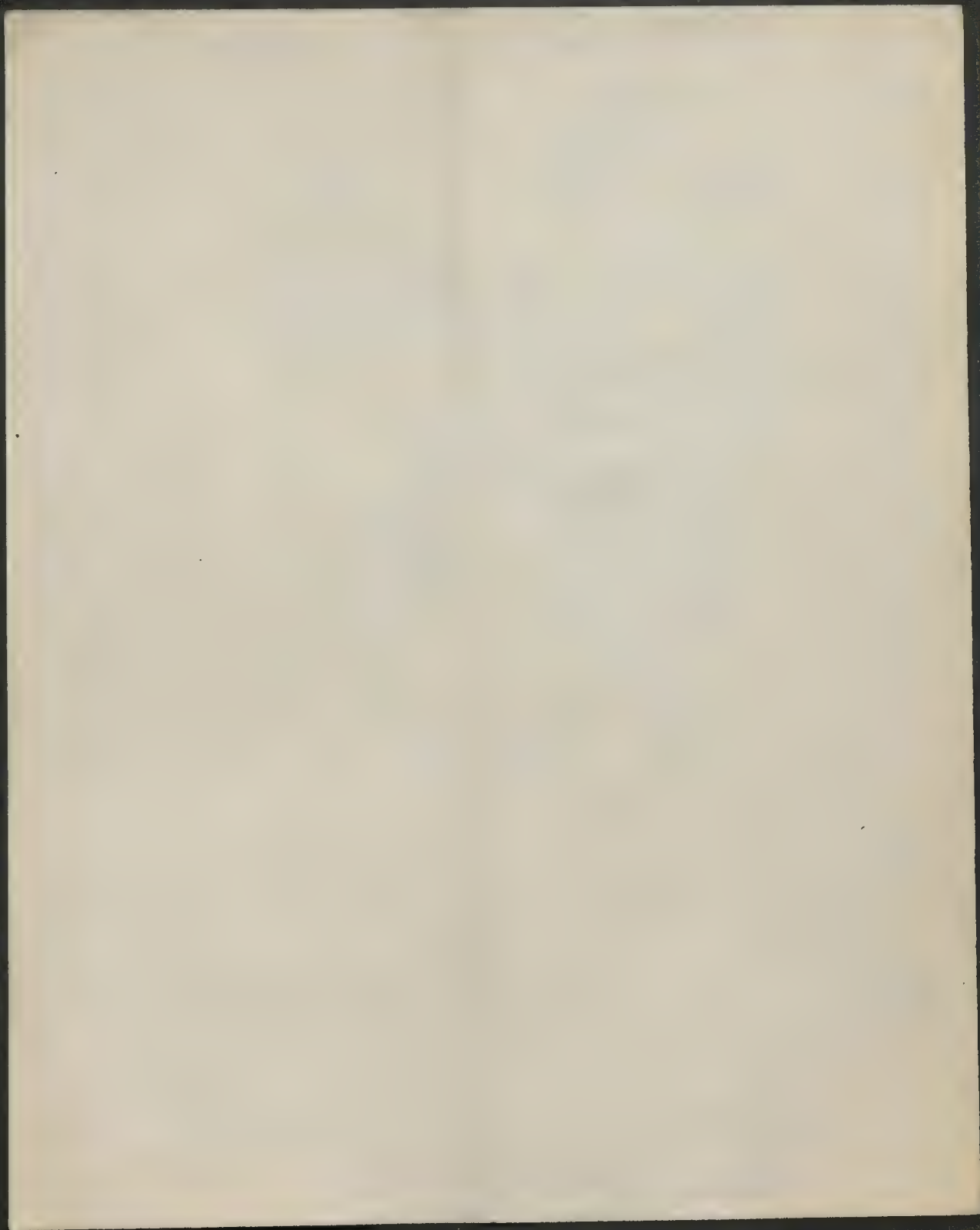
$$\alpha = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi \mu \bar{L}}{\sqrt{\lambda_{\mu}^2 \bar{L}^2 + K_{\mu}}}$$

Also Absorption desto weniger bemerkbar je größer  $\lambda$ , d.h. d.h.,  
Holz, auch für Hertz Wellen durchgängig, aber für Licht nicht.

$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_{\mu}^2 \bar{L}^2 + K_{\mu}}} \quad \text{also } v, \text{ d.h. auch } \underline{n} \text{ abhängig von } \bar{L}$$

= Dispersion

Je größer  $\bar{L}$ , desto größer  $\bar{L}$ , vollkommene Licht ganz undurchdringlich.



Hydromechanik

$$m \frac{da}{dt^2} = m \frac{da}{dt} = f'$$

$$* \text{ also: } m = \rho dv$$



$$f' = \rho dv * -\nabla p dv$$

äußere Kräfte gesucht prop. in Dens auf Masseneinheit

$$\frac{da}{dt} = f - \frac{1}{\rho} \nabla p$$

Wobei jeder Partikel auf seinem Wege verfolgt

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\nabla a \nabla)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial t} + (\nabla a \nabla) a &= f - \frac{1}{\rho} \nabla p \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho a) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0$$

Euler'sche Gleichungen

Verschiedene andere Formen: Lagrange, Clebsch, Murnaghan etc.

Vereinfachung: indem man für tropfbare Flüssigkeiten  $\rho = \text{const}$  in jene Erscheinungen wo Veränderlichkeit von  $\rho$  in Betracht kommt, gehen in die Skizze

Hydrostatik

$$\frac{1}{\rho} \nabla p = f$$

$$\nabla p = g \rho \text{ wenn nur Schwerkraft}$$

$$p = g \rho z + \text{const}$$



20. Körper eingetaucht in Flüssigkeit

Drehmoment mit Result. Kraft.



$$\text{Res. Kraft} = \sum f = \int p \, dF \, N$$

$$= \int g \rho \int z \, N \, dF$$

" i cos l + j cos m + k cos n

$$= g \rho \left[ i \int z \, dF_1 + j \int z \, dF_2 + k \int z \, dF_3 \right]$$

fallen weg weil j und k ein - Vertik. entspricht mit gleichem z

$$= g \rho \, k \int z \, dF_3 = g \rho \, k \iiint dz \, dF_3 = g \rho \, k \times \text{Volum.}$$

Achsen des Prinzip

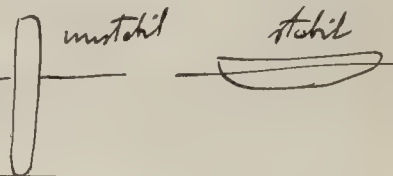
Dazu kommt aber noch im allgem. ein Drehmoment:

$$\sum V f r = \int V p \, N_2 \, dF$$

Dafür lassen sich nicht mehr so einfache Ausdrücke finden, man muss ab

zerlegen in Componenten und integrieren

Dies ist 20. bei Schiffsbau von Wichtigkeit



Eigentliche Hydrodynamik

beginnt bei der Teilung der Bewegung in Wirbelung und wirbelfrei Bewegung.

Satz: Helmholtz

85

3

Was das Kennzeichen für Wirbel ist, sehen wir schon kennen gelernt  
wenn  $\text{curl } a \neq 0$  ist, so heißt das, dass an der betreffenden Stelle  
des Flüssigkeitsvolumenelement rotiert, denn wir haben ja  
früher gezeigt, dass bei starren Körpern  $\text{curl } a$  der Winkel.

die doppelte Rotationsgeschw. gibt

$$\begin{aligned} a &= a_0 + \nabla \varphi \\ \text{curl } a &= 2\omega \end{aligned} \quad \text{[Satz Helmholtz]}$$

Man kann sich immer zerlegen  $a = \nabla \varphi + \text{curl } b + \nabla A$

$$a = \nabla \int \frac{da}{r} dv + \text{curl} \int \frac{\text{curl } a}{r} dv + \nabla A \quad \nabla^2 A = 0$$

bei incomp. = 0

also Flüssigkeitsbewegung von zwei Potentials ableiten einen skalaren  
Strömungspotential  $A$  und einem Vektorpotential  $b$   
Zuletztes wird nur dann von 0 verschwinden, wenn  $\text{curl } a$  nicht  
überall Null ist also bei wirbelnden Flüssigkeiten

Dagegen bei wirbelfreier Bewegung, wo  $\text{curl } a = 0$ , dann wird die  
Gleichung  $a = \nabla A$  sein also  $u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$

[Suche Potential]

Das Wichtige diesem Zerlegung liegt nun darin, dass:

Bewegt sich eine Flüssigkeitsmasse wirbelfrei so wird sie sich immer so  
bewegen, ihren Winkelgeschw. bleibt immer konstant, solange nur solche äußeren  
Kräfte wirken, welche ein Potential haben [Natürlich nur für ~~unverformte~~  
reibungsfreie ideale Fl.]

$$\frac{da}{dt} = f - \frac{1}{\rho} \nabla p$$

$$\downarrow \nabla U = \nabla P$$

$\frac{d}{dt}(\text{curl } a) = 0$  also ~~die~~  $\text{curl } a$  unveränderlich mit der Zeit

das  $\frac{d}{dt}$  ist aber nicht bezogen in Bezug auf einen fixen Punkt des Raumes sondern auf bestimmte Teilchen in einem Ozean. Es kann natürlich an einem Punkte einmal ein Wirbel bestehen und dann anderswohin gehen, aber die Teilchen die einmal im Wirbel drin sind bleiben immer drinnen und die Intensität des Wirbels bleibt unverändert. Gegen diesen Beweis könnte man noch Einwendungen machen, dass in  $\frac{d}{dt}$  die  $a$  enthalten ist, daher  $\text{curl}$  nicht eingesetzt werden kann. Klare daher folgenden Beweis (nach Kelvin):

$$\int S a \, ds = \text{Circulation} = \int \text{curl } a \cdot N \, dF$$

Die Gestalt der Fläche ist willkürlich nehmen wir d. Wirbelröhre



Dann trägt zu dem Integral nur die Einflüsse bei

also  $\text{Circulation} = \text{curl } a \times \text{Querschnitt der Wirbelröhre}$

dies ist also in einer Wirbelröhre constant

Wenn man Querschnitt unendlich klein macht bekommt man also

$$q \cdot \text{curl } a = \oint a \, ds \text{ in diesem Punkte}$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}} \mathcal{L} ds = \int_{\mathcal{B}} \frac{d\mathcal{L}}{dt} ds + \underbrace{\int_{\mathcal{B}} \mathcal{L} \frac{d^2 s}{dt^2}}_{\int_{\mathcal{B}} \mathcal{L} da = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}} \mathcal{L} a^2}$$

$$= \underbrace{\int_{\mathcal{B}} \nabla P ds}_{\int dP} + \int d \mathcal{L} \frac{a^2}{2}$$

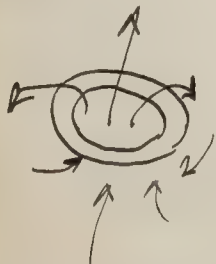
über geschl. Curve  $= 0$

also Circulation constant in einer  
mit der Flüssigkeit fortbewegten Bahn

somit Wirbel constant (wenn Wirbel = Produkt  $q \times \text{Umlauf}$ ).

Wirbel können somit mittels conservativen Kräfte nicht erzeugt werden, ob von  
sie da sind, so sind sie ewig. [Können aber wohl erzeugt werden z.B. durch  
Reibung oder Kräfte im ström. Strom].

Bekanntlich hat Kelvin diese merkwürdige Eigenschaft in seiner Wirbeltheorie  
Theorie die Bewegung gegeben.



Randringe; solche treten auch gegenwärtig  
Anziehungen und Abstoßungen aus [von J. Thomson näher  
untersucht] fort können durch eine der beschriebenen

ist. Mathem. Oberflächengestaltung. ellipt. Functionen.

Wissenschaft ist über wirbelnde Bewegungen trotz der Bemühungen vieler

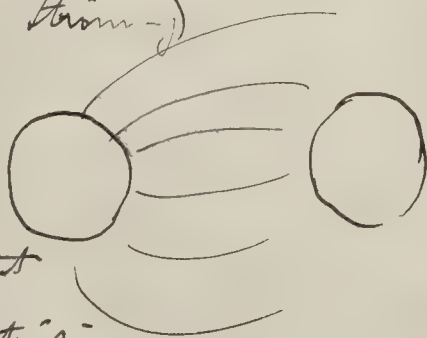


6. Forscher, namentlich in England, relativ wenig herausgebracht worden.  
Wirbel in 2 Dimensionen sind leichter zu behandeln, als solche in 3 Dim.

Viel mehr kultiviert wurde seit jähren das Gebiet der Potentialtheorie  
da es ja in unmittelbarem Zusammenhang steht mit den sonstigen  
Untersuchungen in Electr. etc., wo  $\nabla^2 A = 0$ .

Die ganze Sache reduziert sich in diesem Falle darauf, Lösung dieser  
Gleichung zu finden, welche dem gegebenen Aufsatze bedürftig genügt.  
Es entspricht also jedem electrost. Problem (auch ein hydrodyn.-  
oder jedes Problem der stationären Strömung.)

10. El. Feld zw. 2 Kugeln



Wenn an der Grenzfläche Plötzlichkeit mit  
dem bestimmten Quantität ein oder ausströmt -  
so werden Stromlinien zum Vorschein kommen



Electr. Strömung zw. 2  
Electroden

Bei Vernachlässigung von Stößen erhält man

30

$$\frac{\partial a}{\partial t} = f - \frac{1}{\rho} \frac{\partial A}{\partial x} \quad \parallel \quad \frac{\partial}{\partial t} \nabla A = \nabla \left( g z - \frac{1}{\rho} \right)$$

$$\frac{\partial A}{\partial t} = g z - \frac{1}{\rho} + \text{const} \quad \text{wenn die Const. aber in } \frac{\partial A}{\partial x} \text{}$$

$$\left( \frac{\partial A}{\partial t} \right)_0 = g z_0 \quad \text{Eigenwert ist } \frac{\partial A}{\partial t} \text{ für } \frac{\partial A}{\partial x} \text{ zu nehmen, aber dies ist bereits } = \left( \frac{\partial A}{\partial t} \right)_{z=0}$$

$$z_0 = \frac{1}{g} \left( \frac{\partial A}{\partial t} \right)_0$$

$$\frac{\partial z_0}{\partial t} = u_0 = \frac{1}{g} \left( \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} \right)_0 = \left( \frac{\partial A}{\partial x} \right)_0$$

$$A = f(x) \sin \left( \frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) 2\pi$$

$$\nabla^2 A = -\frac{4\pi^2}{\lambda^2} f(x) + f''(x) = 0$$

$$f(x)^2 = \frac{4\pi^2}{\lambda^2} f(x)^2 + \text{const} = 0$$

$$f'(x) = \pm \frac{2\pi}{\lambda} f(x)$$

$$f(x) = M e^{\frac{2\pi}{\lambda} x} + N e^{-\frac{2\pi}{\lambda} x}$$

$$x = -l: f(-l) = 0$$

$$M e^{\frac{2\pi}{\lambda} l} = -N e^{-\frac{2\pi}{\lambda} l}$$

$$f(x) = C \left[ e^{\frac{2\pi}{\lambda}(x-l)} + e^{-\frac{2\pi}{\lambda}(x-l)} \right]$$

$$A = C \left[ e^{\frac{2\pi}{\lambda}(x-l)} + e^{-\frac{2\pi}{\lambda}(x-l)} \right] \sin 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T} \right)$$

$$z_0 = \frac{2}{g} C \frac{2\pi}{T} \cos 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T} \right)$$

$$g \frac{2\pi}{\lambda} \left( e^{-\frac{2\pi}{\lambda} l} - e^{\frac{2\pi}{\lambda} l} \right) = \left( \frac{\partial A}{\partial x} \right)_0 = \left( \frac{\partial A}{\partial x} \right)_0 = -\frac{4\pi^2}{T} \left( e^{-\frac{2\pi}{\lambda} l} + e^{\frac{2\pi}{\lambda} l} \right)$$

$$\text{Die Entz. f. } \frac{\lambda}{T} = \frac{\lambda}{T}$$

$$\frac{\lambda}{T} = c = \sqrt{\frac{g \lambda}{2\pi} \frac{e^{-\frac{2\pi}{\lambda} l} + e^{\frac{2\pi}{\lambda} l}}{e^{-\frac{2\pi}{\lambda} l} + e^{\frac{2\pi}{\lambda} l}}}$$

Da durch  $T$  bestimmt als  $f(x)$   
 $\lambda$  muss durch Anfangs beding.  
 gegeben sein

Wenn man also ~~an~~ eine solche Corinus velle herstellt und  
jeden Punkt die aus der Formel folgende Einwirkung gibt so wird sie sich  
mit der Erde in unmerklichen ~~Erstöße~~ fortbewegen

2. <sup>größt</sup> wenn ~~h klein~~ im Vergleich zu  $\lambda$ : 
$$c = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}} \sqrt{\frac{1 + \frac{2\pi}{\lambda}h + 1 + \frac{2\pi}{\lambda}h}{1 - \frac{1\pi}{\lambda}h + 1 + \frac{2\pi}{\lambda}h}} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}h}$$
  

$$= \sqrt{gh}$$

$\lambda \ll h$

Legen von  $\lambda$  klein zu  $h$ :  $c = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$

Unabhängig von  
Dichte der Flüssigkeit  
und der Tiefe

Erster Fall: Wellen im rechten Wasser, Erdbebenwellen

Wenn Flutwellen sich fortbewegen werden

Zweiter Fall: gewöhnliche Meereswellen

Bahn jedes einzelnen Teilchens

$a = \nabla A$

in Bahn:  $a' = \nabla A + (\text{Sat } \nabla) a$

zu vernachlässigen das zweite Glied

$$u = C \frac{2\pi}{\lambda} \left[ e^{\frac{2\pi}{\lambda}(z-h)} + \dots \right] \cos 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) \Bigg\} = \frac{dx}{dt} \quad \text{Schnellbewegung}$$

$$w = C \frac{2\pi}{\lambda} \left[ e^{\frac{2\pi}{\lambda}(z-h)} - \dots \right] \sin 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) \Bigg\} = \frac{dz}{dt}$$

$$x = \frac{iT}{\lambda} \left( e^{\frac{2\pi}{\lambda}(z-h)} + \dots \right) \sin 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T} \right)$$

$$z = C \frac{T}{\lambda} \left( e^{\frac{2\pi}{\lambda}(z-h)} - \dots \right) \cos 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T} \right)$$

Also im allgem. elliptische Bahn

~~für Flutwellen~~

Wenn  $\frac{h}{\lambda}$  sehr groß ist, so werden Kreise

Das sind noch nicht alle möglichen Fälle, nur insoweit,

Es gibt aber auch Wellen mit Wirbelbewegung

Dann muss die Wellenform entstehen unter dem Einfluss von

Da sind noch zu berücksichtigen Luftinfluss, Reibung der Flut, Bathy an Bord.

Capillarität.

Dies ist bei ganz kleinen Wellen das allein bestimmende

Kreisbewellen (ripples)

Wellen anderer Art: Flutwellen

Gleichgewichtstheorie von Newton, dynamische Theorie von Laplace, Airy,

Kelvin, Darwin

Unterschied liegt in der Trägheit der Flutbewegung, welche im ersten Falle vernachlässigt

wird. Dass dies wirklich die fortschreitende Wellenbewegung aufgefassen werden

muss, wird am klarsten, wenn man die Tüte des Fortsetzes der Flut

betrachtet und sieht wie sie sich aus dem offenen Meer in die Punkte etc.

hineinverflusst. N. Cuxhaven - Hamburg ca 5 Stunden, weil nichts

Wunderbares an Fortpflanzung, ebenso Grönland - London

Höhe darüber steigt ungemein wenn in der Ästuar, Punkte etc.

nurgt N. Canal von Bristol Höhe bis 15 m, während in freien Ocean

nur wenige Decimeter

Obgleich es sich der Natur nicht entzieht, ist es zu kompliziert, also empirische

Bestimmung, indem man sich darauf stützt, dass es jedenfalls eine periodische

Bewegung ist und solche können immer in Summen von Sinuswellen aufgelöst werden



## 15-Harmonischer Analysator.

Diese Erscheinung haben wir schon in der Menge der verschiedenen Untersuchungen gesehen. Größte Wichtigkeit für Erphysiologie.

Restierende Fließgeschwindigkeit.

$$\frac{da}{dt} + (Na \cdot v)a = f - \frac{1}{\rho} \nabla p + \mu \nabla^2 a$$

$$\mu \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial a}{\partial r} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

$$\mu \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial a}{\partial r} \right) + \frac{p_2 - p_1}{l} \frac{r}{\rho \mu} = 0$$

$$r \frac{\partial a}{\partial r} = - \frac{p_2 - p_1}{l} \frac{r^2}{2\rho \mu} + \text{const}$$

$$a = - \frac{p_2 - p_1}{l} \frac{r^2}{4\rho \mu} + \sqrt{A^2 r^2 + B}$$

$$0 = - \frac{p_2 - p_1}{l} \frac{R^2}{4\rho \mu} + B$$

$$a = \frac{p_1 - p_2}{4\rho \mu l} (R^2 - r^2)$$

$$\int_0^R r dr = \frac{p_1 - p_2}{4\rho \mu l} \left( \frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4} \right) \pi$$

Poiseuille's Formel.

$$= \frac{p_1 - p_2}{8\rho \mu l} R^4 \pi$$

Exp. zeigt, dass kein Blut längs Röhre fließt, indem dieses Verhältnis  $r^4$  sehr vergrößert.

Auch für andere Formen als kreisförmige und ebenso für Lösungen gemessen unter Druck  $\frac{p_1 + p_2}{2}$ ; dabei jedoch bei sehr niedrigen Drucken: Blut.

Sonst lassen sich Reibungs-Aufgaben leicht nur lösen wenn die quadratischen Glieder vernachlässigt werden.

## Question

Prober immer total 5 Vektoren getrennt.

Wenn man sie nun vereint = Quotienten

$Q = S + V$  ähnlich wie komplexe Zahlen; die in Physik vorkommen  
sind allerdings keine  $Q$  sondern  $S$  oder  $V$ , aber als Rechengrößen  
untereinander recht brauchbar

$$Qab = Sab + Vab$$

$$= ab = q$$

$$Sg = Sab \quad Vg = Vab$$

$$= a_0 b_0 \cos \alpha + a_0 b_0 \sin \alpha \cdot \vec{V} \quad C \perp ab$$

Hamilton ebenfalls definiert es etwas anders; er nimmt für  $Sab$  das  
negative Zeichen und definiert  $Sab = -a_0 b_0 \sin \alpha$ , aber das ist Sache  
der Übereinkunft; wenn in Übersetzung zu stehen wurde in statt  $Qab = Sab + Vab$

~~Unter dieser Definition kann man sich sein~~

Für sich hat Quotient in Physik keine Bedeutung, nur ein Operationszeichen,  
welches erst auf etwas angewandt werden muss

$$q \cdot c = Sg \cdot c + Vg \cdot c \quad \text{Das } Q \text{ Zeichen kann man auch weglassen}$$

$$\text{und hat dann allgemein} \quad ab = -Sab + Vab$$

$$\text{ebenso wenn eine Quotienten } g \quad g \cdot b = -Sg \cdot b + Vg \cdot b$$

$$\text{Wenn } a = b \quad a^2 = -Sa^2 = -a_0^2$$

$$a \perp b \quad ab = Vab$$

Anschaulichere Bedeutung wenn man zu Quotienten übergeht, während wir  
bei  $S$  und  $V$  die Proben anschaulich definieren konnten.

$$a' \cdot b = S'a' \cdot b + V'a' \cdot b$$

$$\text{das schreiben wir } \frac{a'}{a}$$

$$\begin{aligned} \text{dass wäre } b \cdot a' &= S'b \cdot a' \\ &= S'a' \cdot b - V'a' \cdot b \\ \text{das schreiben wir } &= \frac{b}{a} \end{aligned}$$

hier wir jetzt  $qa$  bilden

$$= S(qa) + V(qa)$$

$$= S(Va^{-1}b \cdot a) + V(Va^{-1}b \cdot a)$$

$$= S(Sq \cdot a) + S(Vq \cdot a) + V(Sq \cdot a) + V(Vq \cdot a)$$

$$= S(Va^{-1}b \cdot a) + S(Vq \cdot a) + V(Va^{-1}b \cdot a) + V(Vq \cdot a)$$

$$= \underbrace{S(Va^{-1}b \cdot a)}_{=0} + \frac{a \cdot Sqb}{a^2} + \frac{V(Va^{-1}b \cdot a)}{a^2}$$

$$= \frac{a \cdot b}{a^2} \cos \alpha + \frac{b \cdot \sin \alpha}{a} \dots$$

Also  $a$  wird durch Multiplikation mit  $q$  in der Form  $qa = b$  in  $b$  verwandelt

Die Quaternion  $q$ , wenn sie in einem Quaternion dargestellt, kann man somit als einen Operator betrachten, denn  $ba \perp q, b$  steht

Denn es lässt sich leicht nachweisen, dass wenn irgend ein Vektor  $a$  in der Ebene von  $ab$  liegt und gleich  $ba$  ist wie  $a$  wieder in  $a$  verwandelt



Wäre

Die Quaternion besteht in einer Drehung um  $a$  und  $b$

$$q = Iq \cdot Uq$$

In obigen Notation kann man also setzen  $b = \underbrace{(S(Va^{-1}b) + V(Va^{-1}b))}_q a$

Bestimmungstücke einer Quat. :

$$q = m + ix + jy + kz \quad \text{|| daher Name } q \text{ ||} \quad \text{ebenso auch } \text{Imag} \quad 1 \text{ Teil von } q$$

Längenmaß sind sowohl

Scalar als Vektor als degenerierte Quaternionen aufzufassen

$$\text{W. } q_1 = ia_1 + ja_2 + ka_3$$

$$q_2 = ib_1 + jb_2 + kb_3$$

$$S q_1 q_2 =$$

Rechnungsregeln für Quat. folgen aus Definitionen

Addition und Subtraction so wie sonst

Skalare Multiplik. : assoziativ und distributiv. aber nicht kommutativ

Der allgemeine Beweis allerdings sehr langwierig, den man kann auch umgehen aus V und S unter Voraussetzung für spezielle Fälle

Noch spec. Fälle ; Wenn sind  $q =$  reiner Vektor

wenn  $S q = 0$  also  $q \perp$

Daher Definition eines Vektors = Produkt zweier  $\perp$  Vektoren = Quadrat Vektor  
wobei  $q$  reiner Vektor ist

Reiner Skalar wenn  $q \parallel 1$

So W. haben wir gehabt  $V i j = k$

das kann man durch  $i^2 = 1$

$$V i^{-1} j = k = V \frac{j}{i} = \frac{j}{i}$$

$k$  ist also das Hilfsgrößen aufzuheben, welches  $i$  in  $j$  überträgt  
oder das Produkt von  $j$  durch  $i$



$\frac{1}{26}$  Wir haben also definiert:

$$q(ab) = Sab + Vab$$

$$= \dots$$

$$q\left(\frac{b}{a}\right) = \frac{b_0}{a_0} \cos \alpha + \frac{b_1}{a_0} \sin \alpha \cdot C.$$

Wenn also  $q a$  gebildet =  $b$  Resultat = Übertrag eines Vektors in einen anderen. Also Quotienten  $q =$  Quotient zweier Vektoren.

Es gilt das aber auch für beliebige Quot., denn immer können wir durch Division  $A$  in diese Form gebracht werden ist  $q(ab) = q\left(\frac{b}{a}\right) \cdot a^2$

Also allgem. Quot. = Vektor Übertrag operator. Dies gilt selbst Zerlegt in zwei Bestandteile =  $Q = TQ + VQ$  Addition und Subtraktion welche multiplikativ verbunden sind.

Anderer Zerlegung folgt daraus, dass  $q = Sq + Vq$   
 $= m + ix + jy + kz$

Daher Name Quaternion

Daraus kann man schon sämtliche Rechenregeln finden, wie sich zeigen wird, aber auch direkt.

Addition und Subtraktion aber weiter wie sonst bei Multiplik. gilt erst. und direkt. Erste, aber nicht unmittelbar.

Hamilton führt den allgemeinen Beweis auf geometrische Weise mittels sphärischer Kugelschnitte, dies ist aber ungemein compliciert. Für Produkte

von drei Vektoren str. kann man das schon ~~aus~~ aus den Regeln <sup>26</sup>  
für  $\nabla$  und  $V$  ableiten.

~~Quadranten~~ 4 Zeilen angehen

Spezielle Fälle, wenn ein Vektor dyagonalisiert = Produkt zweier  $\perp$  Vektoren  
= Quadranten Vektor, weil er Drehung um  $90^\circ$  erzeugt

$$ij = Vij \text{ (weil } \nabla ij = 0) = k \quad ||$$

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

~~Wichtig~~

$+k$

$$ij^{-1}$$

$$= -k = \frac{i}{j}$$



$$k = \frac{i}{j}$$

$\pm k$  ist als Hülfsgröße aufzufassen, welche  $j$  in  $-i$  überführt  
resp. ebenso  $-j$  in  $-i$  resp.

So steht man auch ein, wenn wir jetzt das negative Zeichen für

$\nabla$  betrachten, denn:

$$ij = k \quad ||$$

$$~~ijk~~ \times j$$

$$ijj = kj = -i$$

$$\text{sonst } jj = -1 = j^2$$

wir haben früher geschrieben

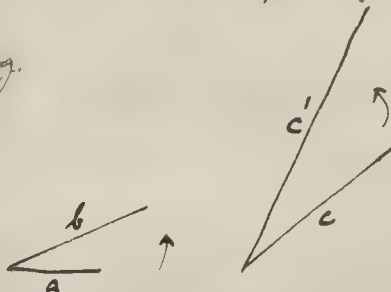
$$Vij = k$$

$$V \nabla Vij = -Vj \cdot Vij = Vkj = -i$$

Aber wir dürfen die Vektoren nicht  
nicht weglassen wir haben nicht  
geschrieben  $V(Vij \cdot j) = ijj$  daher  
keine Notwendigkeit zum Ersetzten  
zu machen.

Die Richtung von  $k$  ist willkürlich, also kann nach Bedarf jeder Vektor aufgeführt werden als ~~der~~ Vektor von  $\perp$  in einer zu seiner Richtung  $\perp$  Ebene. Bilden die beiden Vektoren einen  $\angle$  von  $90^\circ$  so ist dieser Quotient resp. Drehquotient kein einfacher Vektor sondern Vektor + Skalar. Dann sind aber 4 Bestimmungstücke: Ebene der Quot. ( $2\angle$ ), Stück des Drehwinkels und Stück der Drehung.

$$\text{od. } c' = \frac{b}{a} \cdot c$$



würde diesen Quot. auf einen anderen Vektor angewendet, welcher nicht in ihrer Ebene liegt, so würde das Resultat nicht in einem Vektor sondern wieder eine Quotientenlinie sein.

Der Zweck dieser aller Festsetzungen liegt hauptsächlich in Veranschaulichung der Rechnung, man erhält da alle Formeln wie od.  $V_a V_b = c S_{ab} - b S_{ac}$  welche wir in Vektor Analysis gehabt haben, entstehen aber andere welche nur für Quot. anwendbar sind. od.

$$S_{ab} = S_{ba}$$

$$V_{ab} = -V_{ba}$$

$$ab + ba = 2 S_{ab}$$

$$ab - ba = 2 V_{ab}$$

$$V_{ab} + V_{ba} = 0$$

20. obige Formel haben wir berechnet durch explizite Ausrechnung. 25  $\frac{4}{26}$

2  $Vbc = bc - cb$

2  $V_a Vbc = Vabc - Vacb + Vbac - Vbca$

$= V(ab + ba)c - V[(Sac + Vac)b + b(Sac + Vac)]$

$= Vc(2Sab) - 2Vb(Sac) + V$

$V_a Vbc = \cancel{Vc} c Sab - bSac$

[Wir haben das umgekehrte Stück fehlt]

In ähnlicher Weise kann man oft die Rechenen vereinfachen, mit Hilfe  
dieses Multiplikation Regel. Für die Algebra der Quat. ist dies von großer  
Wichtigkeit, wenigstens für die physikalische Anwendung, denn da  
kommen Produkte von mehr als 3 Vektoren nur selten vor und die  
Formeln für diese haben wir schon abgeleitet.

Wenn man eine physikalische Quat. aufstellt, so muss man sie  
zu Anfang doch wieder in solche 5 Vektoren zerlegen, wie nur die  
physik. Bedingung haben, und da ist selten V-

$Sab \quad Vcb$

$Sa Vbc = Sabc$  denn

$bc = Sbc + Vbc$  etc.

$Va Vbc$  etc. ausgerechnet



5/26 Eine interessante Anwendung: Potenzen von Vektoren.

Wir haben ~~ist~~

$$i = i$$

$$ki = j$$

$$k^2 i = -i$$

$$k^3 i = -j$$

$$k^4 i = i \text{ etc.} \quad \text{also liegt es nahe die Potenzen mit}$$

folgt. ~~Körper~~  $k$  zu definieren

$$j = ki$$

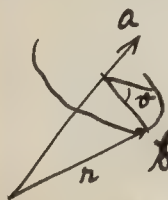
$$k^n i = i \cos \frac{n\pi}{2} + j \sin \frac{n\pi}{2} = (\cos \frac{n\pi}{2} + k \sin \frac{n\pi}{2}) i$$

$$k^n =$$

$$j$$

$$a^n = (Ta)^n \left[ \cos \frac{n\pi}{2} + \sin \frac{n\pi}{2} \underbrace{j}_{\text{Ue}} \right]$$

Das kann weiter dienen um <sup>komplexe</sup> Rotationen zu beschreiben



$$z = a^{-1} \cdot a^n = e^{-i\theta} \cos \theta + e^{-i\theta} \sin \theta$$

$$= -a \cos \theta - a \sin \theta$$

Das ist äquivalent in komplex. in Richtung  $\theta$  und  $\perp$

Erster  $\theta$  bleibt bei Drehung unverändert, letzter  $\theta$  wird um  $\theta$  gedreht

$$\frac{n\pi}{2} = \theta \parallel n = \frac{2\theta}{\pi}$$

$$\frac{2\theta}{\pi} \theta = a^{\frac{2\theta}{\pi}} a \cos \theta = a \cos \theta \sin \theta$$

$$z_1 = -a \cos \theta - a \sin \theta \cos \theta + \sin \theta \sin \theta = (\cos \frac{\theta}{2} + e \sin \frac{\theta}{2}) n (\cos \frac{\theta}{2} - e \sin \frac{\theta}{2})$$

$= a^{\frac{\theta}{2}} n a^{-\frac{\theta}{2}}$  // Dies wird in Kryptographie und in Mechanik starrer Körper von Nutzen sein. Für unendlich klein  $\theta =$  fester Ausdruck  $u + Var$

11.2.

$$f = f_0 + \left[ (s \nabla) f \right]_0 + \dots \quad f = f_i i + f_j j + f_k k$$

$$s = s_1 i + s_2 j + s_3 k$$

$$s \nabla = s_1 \frac{\partial}{\partial x} + s_2 \frac{\partial}{\partial y} + s_3 \frac{\partial}{\partial z}$$

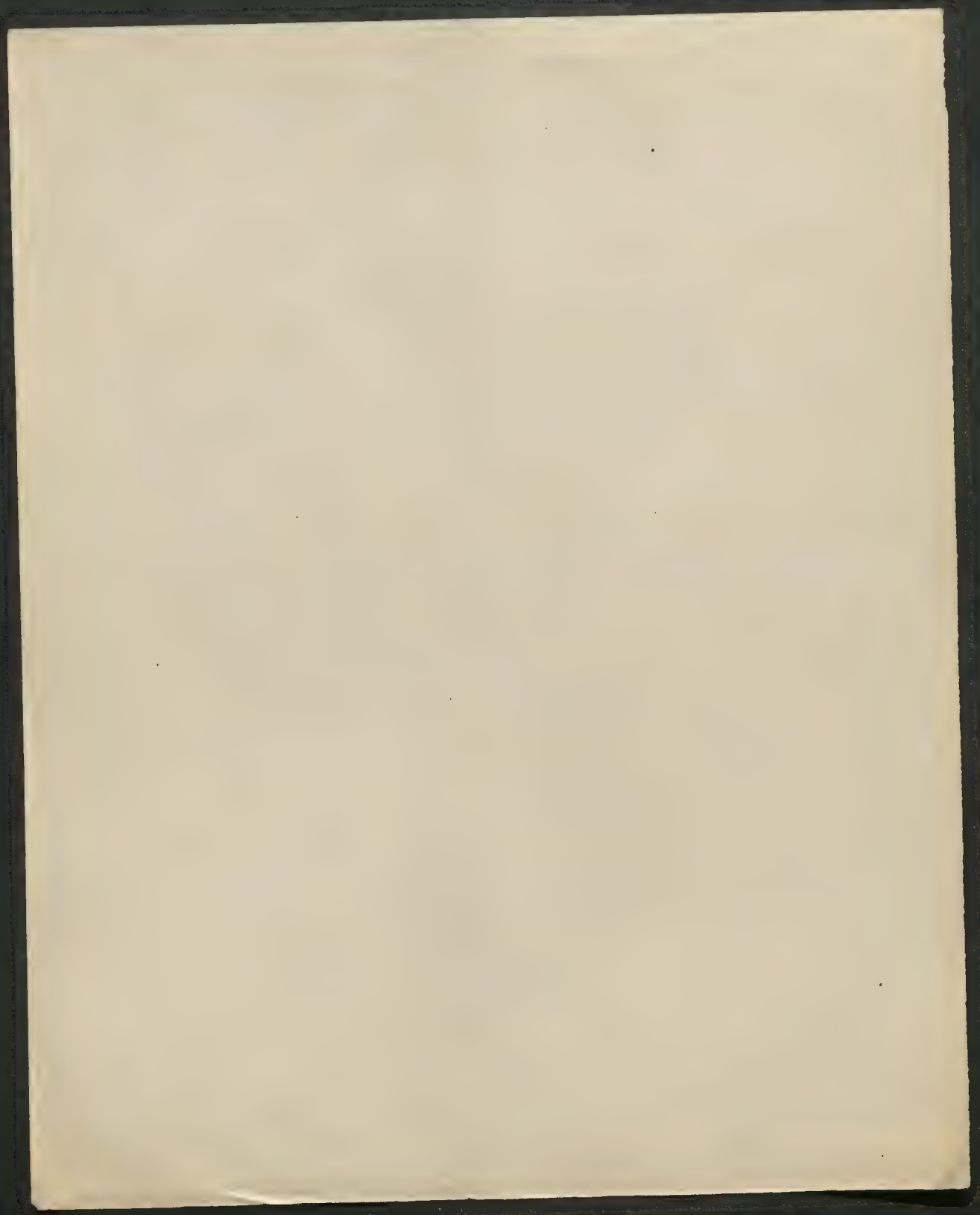
$$f - f_0 = \left[ s_1 \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)_0 + s_2 \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)_0 + s_3 \left( \frac{\partial f}{\partial z} \right)_0 \right] i + \dots + ( \quad ) j + ( \quad ) k \quad \left. \begin{array}{l} = \varphi(s) \\ \text{also allgemeine lineare} \\ \text{Vektorfunktion} \end{array} \right\}$$

In allgemeineren Fällen sind nur sämtliche Komponenten  $\frac{\partial f}{\partial x}$  etc. von Interesse  
~~und~~ unabhängig

$$s \nabla \varphi(s) = s \nabla \varphi_0(s) \quad \left\{ \begin{array}{l} (s_1 a_{11} + s_2 a_{12} + s_3 a_{13}) i \\ (s_1 a_{21} + s_2 a_{22} + s_3 a_{23}) j \\ (s_1 a_{31} + s_2 a_{32} + s_3 a_{33}) k \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} s \nabla \varphi(s) &= (s_1 a_{11} + s_2 a_{12} + s_3 a_{31}) s_1 + \dots \\ s \nabla \varphi(s) &= (s_1 a_{11} + s_2 a_{12} + s_3 a_{13}) s_1 + \dots \end{aligned} = \varphi_0 + \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & \frac{a_{12}-a_{21}}{2} & \frac{a_{13}-a_{31}}{2} \\ \frac{a_{21}-a_{12}}{2} & 0 & \frac{a_{23}-a_{32}}{2} \\ \frac{a_{31}-a_{13}}{2} & \frac{a_{32}-a_{23}}{2} & 0 \end{array} \right\} i$$

V. 4, 5



$q = S_q + V_q$  Quaternion als Operator auf eine zweite Quaternion angewendet 97

$$p = S_p + V_p$$

$$\begin{aligned} qp &= (S_q + V_q)(S_p + V_p) = S_q S_p + \underbrace{V_q V_p}_{\text{Hilfs Vector}} + \underbrace{V_q S_p + S_q V_p}_{\text{Hilfs Vector}} \\ &= S_q V_p V_p \\ &\quad + V_q V_p V_p \end{aligned}$$

Somit wird  $qp$  ein reiner Vector wenn:  $S_q S_p = -S_q V_p V_p$

z.B.  $q = m + a$

$$p = \frac{-S_q a}{m} + b$$

Es wird ein reiner Scalar wenn:  ~~$S_q S_p$~~

$$V_q V_p V_p = -V_q S_p + V_p S_q$$

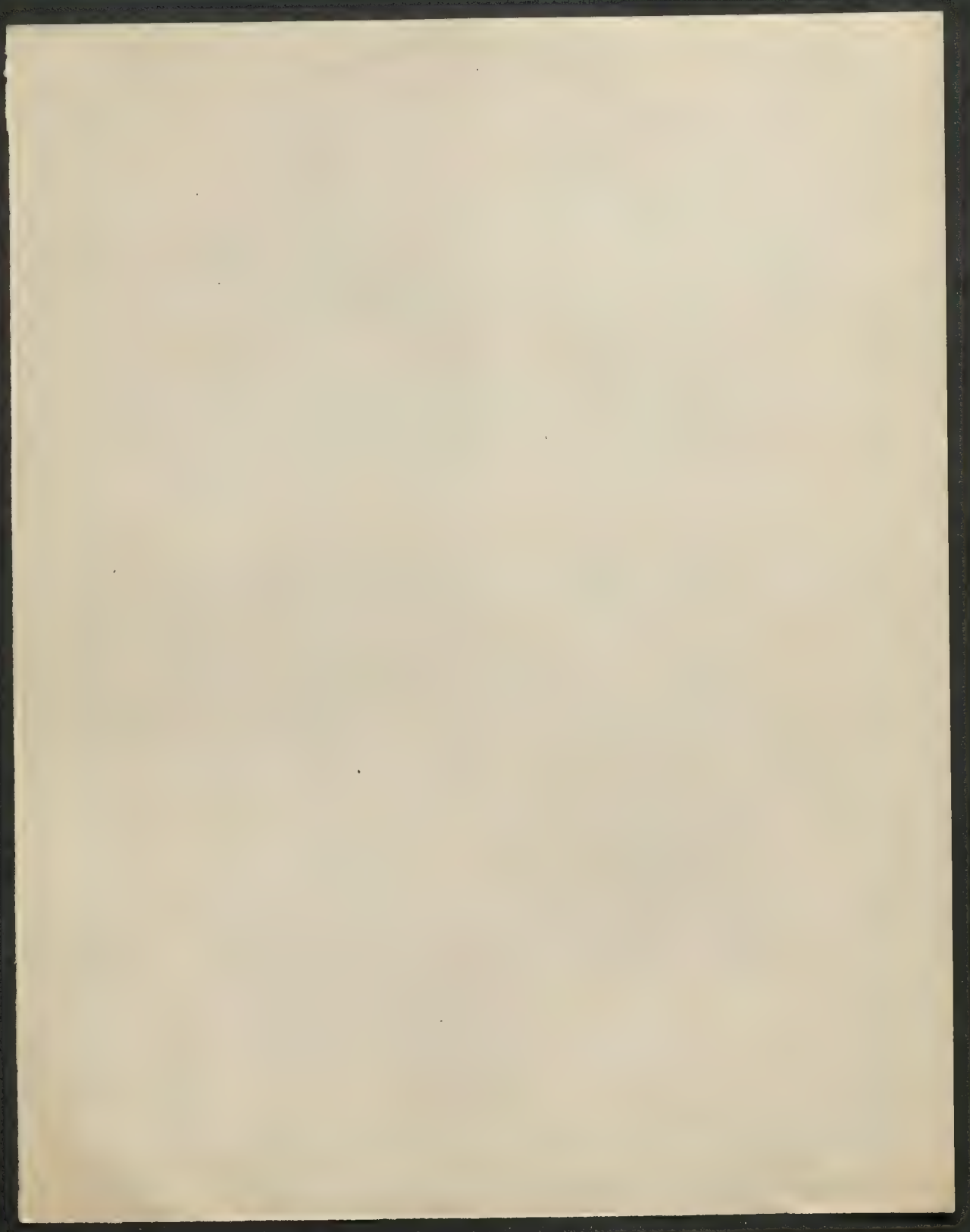
z.B.  ~~$q = m + p$~~

~~$p = \frac{-S_q a}{m} + b$~~  Dies ist im Allgemeinen nicht mehr erfüllbar sein  
nur in speziellen Fällen, denn eine Vector  $S_q$   
= gleichbedeutend mit 3 Achsen; wenn also eine der 4 Achsen  $V_p V_q S_p S_q$   
fest ist so sind schon die anderen mit bestimmt.

Dies ist aber unmöglich, denn  $V_q V_p$  steht  $\perp$  auf  $V_q$  und  $V_p$

also kann es nie ein reiner Scalar werden





$$Q.ab = S.ab + V.ab$$

35

Jeder Drehungsoperator  $\frac{a}{b}$  ist eine Quaternion, <sup>kan</sup> aber auch umgekehrt jede beliebige Quaternion als Drehungsoperator aufgefasst werden?

Ja, denn die Quaternion dreht alle Vektoren welche auf  $V.ab$  senkrecht stehen

$$c \perp V.ab$$

$$Q.ab.c = c.S.ab + \underbrace{V.ab.c}_{V \perp V.ab.c} = \text{bloßer Vektor ohne skalar. theil}$$

Als Definition des technischen  $Q$  muss gegeben werden  $Q = S + V$   
 Somit ist obiges eigentlich zu schreiben

$$Q[Q.ab.c] = S[Q.ab.c] + V[Q.ab.c] =$$

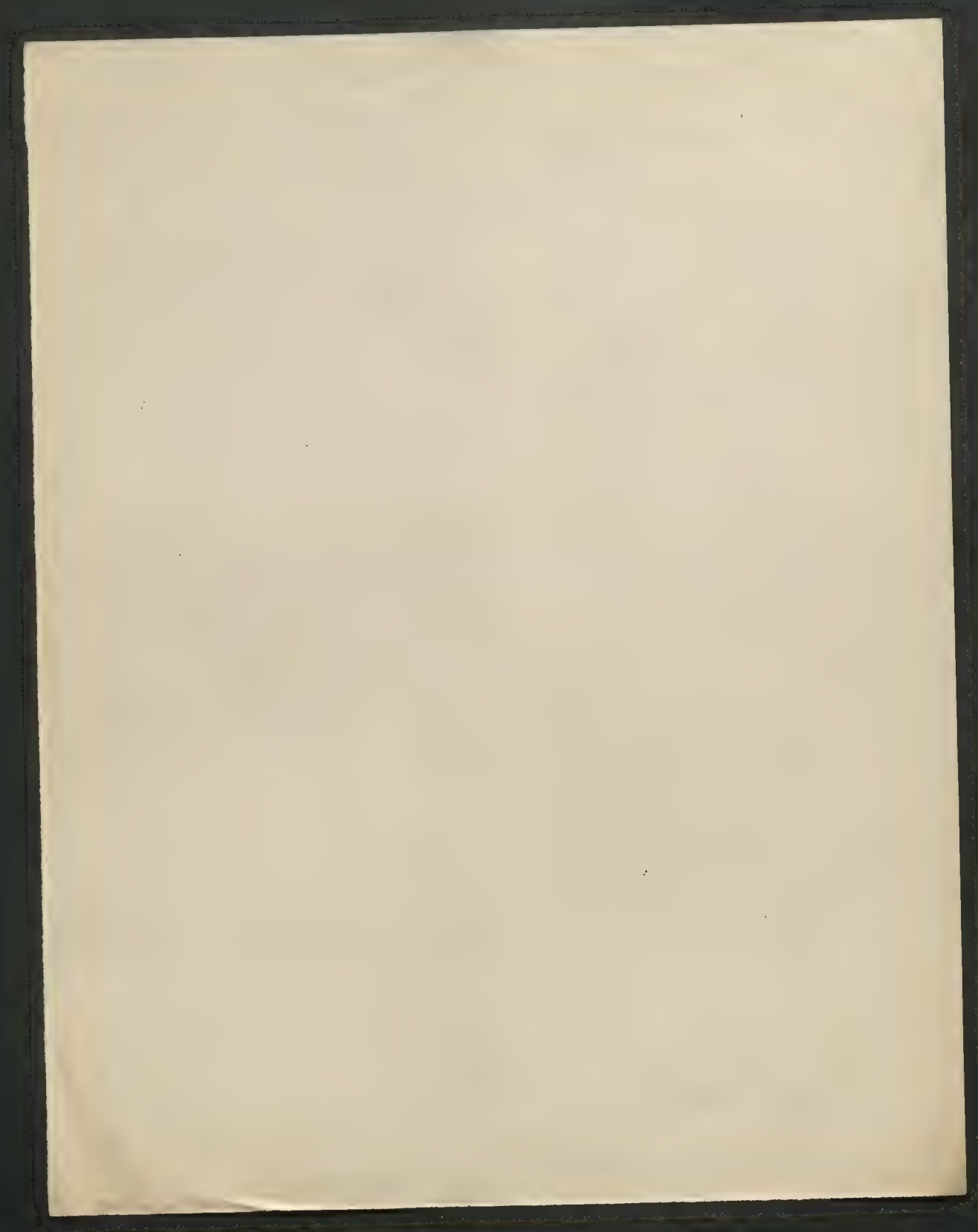
auf einem Vektor

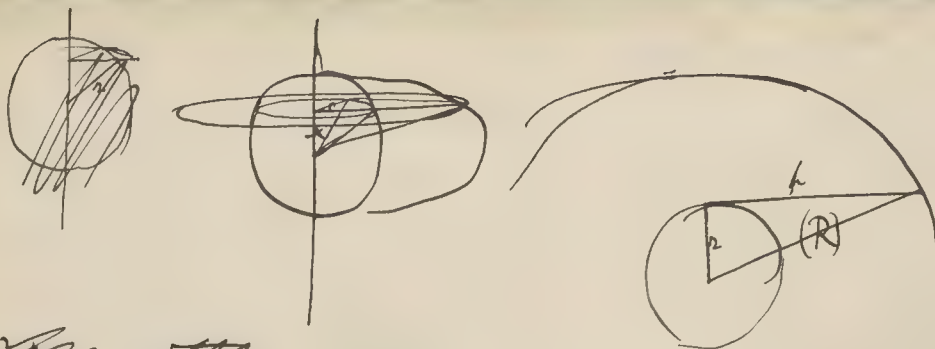
Es zeigt sich also, dass  $Q$  als Operator angewendet die Eigenschaft hat denselben zu drehen, falls er ~~senk~~  $\perp$  darauf steht, sonst wird eine neue Quaternion daraus. — und zwar dreht er um  $90^\circ$  falls der Skalartheil ~~S.ab~~  $S.ab = 0$  ist. // Ebenso zweites Prinzip mit  $Q(\frac{a}{b})$  und allgemein  $q$

• Betreffs der  $Q$  gelten ohne weiteres die Gesetze der Addition und Subtr. Dagegen Multipl. erst zu beweisen:

$$I \quad q.p.r = q.p.r$$

$$\begin{aligned} (S_q + V_q)(S_p + V_p)(S_r + V_r) &= (S_q + V_q)[S_p S_r + S_p V_r + S_r V_p + \underbrace{V_p V_r}_{= S_p V_r + V_p V_r}] \\ &= S_p S_r \quad V_q \cdot V_p V_r = -V_q \cdot V_r V_p = V \end{aligned}$$





$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi \\ p &= r \sin \varphi \\ h &= l_0 r \sin \varphi \end{aligned}$$

$$(R^2) = p^2 + h^2 = r^2 \sin^2 \varphi (1 + l_0^2)$$

$$R^2 = r^2 + r^2 l_0^2 \sin^2 \varphi = r^2 + r^2 l_0^2 \left(1 - \frac{x^2}{r^2}\right)$$

$$x = R \cos \varphi$$

$$R^2 = r^2 + r^2 l_0^2 - l_0^2 R^2 \cos^2 \varphi$$

$$R^2 (1 + l_0^2 \cos^2 \varphi) = r^2 (1 + l_0^2)$$

$$x^2 + y^2 + l_0^2 x^2 = r^2 (1 + l_0^2)$$

$$x^2 (1 + l_0^2) + y^2 = r^2 (1 + l_0^2)$$

$$\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2 (1 + l_0^2)} = 1$$

Somit ist der Querschnitt eine Ellipse mit dem Körper

$s = r + \sqrt{l_0} r$  stellt ein <sup>Rotations</sup>Ellipsoid vor dessen kleine Achse  $= r$   
 groß  $= r \sqrt{1 + l_0^2}$



$$r = \begin{vmatrix} a_1 & c_{12} & c_{13} \\ a_2 & c_{22} & c_{23} \\ a_3 & c_{32} & c_{33} \\ c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ \times & & \end{vmatrix} i + \begin{vmatrix} c_{11} & a_1 & c_{13} \\ & & \\ & & \end{vmatrix} j + \dots$$

$$= c^{-1} a \quad c^{-1} = [i \nabla c_1^{-1} + \dots] a$$

$$c_1^{-1} = i \frac{\begin{vmatrix} c_{12} & c_{23} \\ c_{32} & c_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix}} + j \frac{\begin{vmatrix} c_{12} & c_{13} \\ c_{32} & c_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix}} + k \frac{\begin{vmatrix} c_{12} & c_{13} \\ c_{22} & c_{23} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix}} = \frac{V_{c_2 c_3}}{\nabla c_1 V_{c_2 c_3}}$$

$$c^{-1} = \frac{i \nabla \cdot V_{c_2 c_3} + j \nabla \cdot V_{c_3 c_1} + k \nabla \cdot V_{c_1 c_2}}{\nabla c_1 V_{c_2 c_3}}$$

Hauptkriter:  ~~$\frac{\partial s}{\partial x} = 0$~~

$$c_1' dx + c_2' dy + c_3' dz = 0$$

$$dx + dy + dz = 0$$

$$\frac{\partial s}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial s}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial s}{\partial z} = 0$$

$$d T s = 0$$

$$d(s)^2 = 0$$

$$s^2 = (\nabla c_1 r)^2 + (\nabla c_2 r)^2 + (\nabla c_3 r)^2$$

$$\nabla c_1 r \cdot c_{11} + \nabla c_2 r \cdot c_{21} + \nabla c_3 r \cdot c_{31} = 0$$

$$\nabla c_1 r \cdot c_{12} + \nabla c_2 r \cdot c_{22} + \nabla c_3 r \cdot c_{32} = 0$$

$$\nabla c_1 r \cdot c_{13} + \nabla c_2 r \cdot c_{23} + \nabla c_3 r \cdot c_{33} = 0$$

$d(r)^2 = 0$  würde auf gewöhnliche Methoden der analytischen Geometrie zurückzuführen

Was für eine Fläche ist durch  $\nabla V_{c_1 c_2}$  dargestellt?

$$s^2 = (V_{c_1 c_2})^2 = \frac{1}{2} \nabla c_1^2 \nabla c_2^2$$

$$s = r + V_{c_1 c_2}$$

$$s^2 = r^2 + \nabla c_1 V_{c_1 c_2} + (V_{c_1 c_2})^2$$

Rotationsfläche um  $\nabla c_1$  mit Querschnitt von der Form:  ~~$s = r + V_{c_1 c_2}$~~   $\nabla s \cdot \nabla s = 0$

$$\nabla s \cdot \nabla s = 0$$

$$\nabla s \cdot \nabla s = 0$$

~~111~~  $i \neq m j \neq n k$



$$V(i-j)(i-k) = k+j+i$$

$$p = i + x(mj-i) + y(nk-i)$$

$$= i(1+x-y) + jmx + kny$$

$$N \text{ Normal} = V(mj-i)(nk-i) = \cancel{V}(mni + nj + mk)$$

Sämtliche Flächen werden erhalten durch Permutation von  $i, j, k$   ~~$i, j, k$~~

$$(i+j+k)^{\frac{1}{3}} N (i+j+k)^{-\frac{1}{3}}$$

$$\left. \begin{array}{l} V_{ij} = k \\ V_{ik} = -j \end{array} \right\} V_i V_{ij} = -j = V$$

Andererseits werden sämtliche Flächen auch erhalten werden durch

$$\left. \begin{array}{l} i^{\frac{x}{2}} (j-i)^{-\frac{x}{2}} \\ j^{\frac{y}{2}} i^{\frac{x}{2}} (i-j)^{-\frac{x}{2}} j^{-\frac{y}{2}} \end{array} \right\} \text{Bedeutet Symmetrie} \\ \text{in Bezug auf die Achse}$$

wobei  $x$  und  $y$  alle paarigen Zahlen von 0 bis 4 bedeuten

~~Es~~ Daraus folgt sofort:  $= (j-i)^{\frac{x}{2}} i^{\frac{x-y}{2}} (i-j)^{-\frac{x-y}{2}} (ij)^{-\frac{y}{2}}$

$$= (-1)^{\frac{x}{2}} k^{\frac{y}{2}} i^{\frac{x-y}{2}} (i-j)^{-\frac{x-y}{2}} k^{-\frac{y}{2}}$$

$$= (-1)^{\frac{x}{2}} j^{\frac{y}{2}} k^{\frac{x-y}{2}} (i-j)^{-\frac{x-y}{2}} \dots$$

$$\ddot{r} = f(r)$$

$$\int \ddot{r} \dot{r} = \int \dot{r} f(r)$$

$$\int \dot{r} \dot{r}^2 = \int$$

$$\frac{d}{dt} \dot{r} \dot{r} = -\dot{r}^2 + \dot{r} \ddot{r}$$

$$\ddot{r} = \frac{\mu}{r_0^2}$$

$$\int \dot{r} \ddot{r} = \frac{\mu}{r_0^2} \int \dot{r} dr$$

$$\frac{1}{2} \dot{r}^2 = \frac{\mu}{r_0^2} \int \dot{r} dr \quad \frac{d}{dt} r^2 = r \dot{r} + \dot{r} r = 2 \dot{r} r$$

$$= \frac{\mu}{2} \left[ \frac{2}{r_0^3} - \int \frac{3r^2 \dot{r}}{r_0^4} dt \right]$$

$$= \frac{\mu}{2} \left[ \frac{1}{r_0} - 2 \int \frac{\dot{r}}{r_0^2} dt \right] = \frac{\mu}{2} \left[ \frac{1}{r_0} \right] + c$$

$$\dot{r}_0 = \sqrt{\frac{\mu}{r_0} + c}$$

$$\frac{dU_p}{dt} = U_p \frac{\dot{r}}{r} = \frac{U_p \dot{r}}{r} = \frac{U_p \cdot r}{r^2}$$

$$T[c + \frac{1}{2}r - 2\dot{r}] = c$$

$$\frac{dU_p}{dt} = \frac{\mu}{r} \ddot{r}$$

$$\frac{d}{dt} \dot{r} = \frac{\mu}{r} \ddot{r}$$

$$\dot{r} p_0 =$$

$$(p-2c)_0 = c - p_0$$

$$r - 2 \dot{r} p_0 + 4 \dot{r}^2 = c^2 - 2cp_0 + p_0^2$$

Achtung: für T gilt nicht das distributive Gesetz!!

Wenn lineare Quotienten gegeben durch die Komponenten nach 1, 2, 3

$$s = (c_{11}x + c_{12}y + c_{13}z)i + (c_{21}x + c_{22}y + c_{23}z)j + (c_{31}x + c_{32}y + c_{33}z)k = i\sqrt{c_{11}} + j\sqrt{c_{22}} + k\sqrt{c_{33}} = \underbrace{[i\sqrt{c_{11}} + j\sqrt{c_{22}} + k\sqrt{c_{33}}]}_c$$

Richtung, Größe der

I. Umkehrung || II. ~~Transformationsmatrix~~ Transformationsmatrix nach den Hauptachsen

$$s' = (c'_{11}x + c'_{12}y + c'_{13}z)i + (c'_{21}x + c'_{22}y + c'_{23}z)j + (c'_{31}x + c'_{32}y + c'_{33}z)k = i\sqrt{c'_{11}} + j\sqrt{c'_{22}} + k\sqrt{c'_{33}} = c'r$$

$$s = \left(\frac{c+c'}{2} + \frac{c-c'}{2}\right)r = (a+b)r$$

$$a = \left[i\sqrt{\frac{c_1+c'_1}{2}} + \dots\right]$$

$$b = 0 \quad \frac{c_{12}-c'_{12}}{2}$$

$$\begin{cases} a_{11} = c_{11} & a_{12} = \frac{c_{12}+c'_{12}}{2} & a_{13} = \frac{c_{13}+c'_{13}}{2} \\ b_{11} = 0 & b_{12} = \frac{c_{12}-c'_{12}}{2} & \end{cases}$$

$$= Vlr$$

$$Vlr = \begin{vmatrix} i & j & k \\ l_1 & l_2 & l_3 \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

$$l_1 = \frac{c_{23}-c'_{23}}{2}$$

$$l_2 = \frac{c_{31}-c'_{31}}{2}$$

$$l_3 = \frac{c_{12}-c'_{12}}{2}$$

$$s = ar + Vlr$$

$$\left[ \frac{c_{11}}{a_{11}} + \frac{c_{22}}{a_{22}} + \frac{c_{33}}{a_{33}} \right]$$

$$Vl's = Vl'ar + \underbrace{Vl'Vl}_= r$$

$$Vl'ar = \dots$$

$$s = ar + Vlr$$



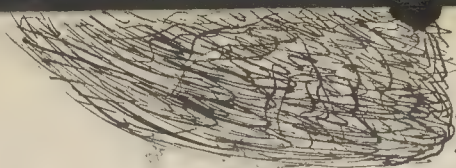
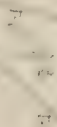
$$A = 45^\circ$$

$$C = 110^\circ$$

$$B = 125^\circ$$

$$a =$$

$$[4.0] = \cos 1$$



TANG



Rehder Einleitzg. in d. Grassmann'sche Ausdehnungslehre Ulm 1889 (0.50)

Sarran Notions sur la théorie des quats Paris 1889 (0.60)

Odstrail kurze Anleitung zum Rechnen n. d. (Hamilt.) Quaternion Halle 1879 (0.75)

Tait Ueber Handb. d. Quat. über von Scherff Leipzig 1880

Dureli-Forte Introduction à la géométrie de l'hyperespace

(?) Grassmann. Paris 1887

Grafe J. H. Vorlesungen üb. d. Theorie d. Q. Leipzig 1883 (3 R. 60)

Kraft F. Abriss d. geom. Kalküls nach Grassmann Leipzig 1893 (6 R.)

Sillegel V. System d. Raumlehre n. Grassmann. <sup>20 R.</sup> Leipzig 1872, 75 (11 R.)

Unverzagt Theorie d. ~~der~~ Quaternionen & linearen Quaternionen Wien 1876 (10 R.)

Quaternionen etc Literatur:

Hamilton: Lectures on Quaternions 1853 (broschur Vorrede, enthält nicht  
wie es das gekomm. ist) containing a systematic statement of a new mathem.  
method.

Elements of Quaternions 1866 [Übers. von Glan.]

Elements des Quaterniones I 1882 II 1884 ]

Tait: An elementary treatise on quaternions

Killand & Tait: Introduction to quaternions 1873 London

Allegret Essai sur le calcul des quaternions 1862 Paris (2 fl.)

Hoüel Théorie élémentaire des quantités complexes IV: Élém. de  
la th. des quaternions Paris 1867/72

Laisant Introduction à la méth. des q. 1881 } Paris (2.20)  
Applications mécaniques du calcul des q. 1877 } (1.80)

Hankel

K. Hertz Piemose vesedy kvaternionov Hamiltona 1887

Grossmann Lineale Ausdehnungslehre 1844 Leipzig (Guthi 1895)

Die st. vollst. u. instr. Form bearbeitet 1862 Berlin

Der Ort des Hamilt. Quot. in d. Ausdehnungslehre Roth. An.

Sur les différents genres de multiplication XII 1877 p. 375  
Journal f. Math. 1855, 123

Steenbrink Revue des Quaterniones Leiden 1891

Mc Suley Utility of Quaternions in Physics London 1893

Phil. Trans. 1892 p. 685 PRSE 1890 p. 98

Phil. Mag. 1892 p. 477

103 1

Dann dienen die 3 erste Skizzen nur zur Deutung der Druckfunktion für die Kontinuitätsgleichung ist ebenfalls schon erfüllt.

Allerdings haben aber diese Lösungen alle nicht viel praktischen Wert vor allem schon deshalb weil in einem geschlossenen System mit festen Wänden (welches einen einheitlich zusammenhängenden Raum einschließt) eine Potentialbewegung nicht möglich ist.

Es sind solche Bewegungen nur möglich wenn die Wände selbst sich verschieben, oder aber in ringförmigen etc. Befest.

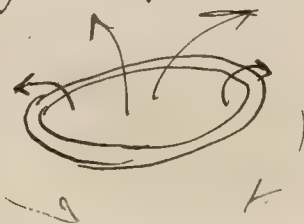
Zu der Bewegung  $SL$  kommt noch Oberflächenbewegung  $\int \mathbf{a} \cdot \mathbf{N} = 0$

$$\mathbf{a} = \text{curl} \int \frac{\text{curl}}{r} d\mathbf{r} + \nabla A$$

Unterschied zw. Vektorbewegung und Potentialbewegung illustriert durch electr. Analogie  
Wenn nämlich bloß Wirbel (unendlich ausgedehnte Flächigkeit, in  $\mathbb{R}^3 \rightarrow 0$ )

Dann analog  $\mathbf{h} = \text{curl} \int \frac{c \, d\mathbf{r}}{r}$   
Vector Potential

Denken wir uns  $SL$  Linien gezogen, welche die Richtung der Wirbels zeigen, analog wie electr. Stromlinien so ist die Verteilung der magnetischen Kraft analog der Verteilung der magnetischen Induktion.





2) Hier habe ich Begriff der Wirbelfäden erreicht. Diese Wirbelfäden nennt man den köhlensörmigen Raum der von Wirbellinien eingefüllt ist:  
 Da können wir die Überlegungen welche vorher und betreffs Circulation etc. gemacht werden etwas erweitern:

$$\text{Circulation} = \int S ds = \int S K ds dt$$

wenn Randlinie = Schnitt einer Wirbelfäden

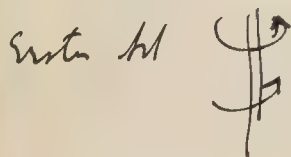


$$= 2\pi \cdot c = \text{constant}$$

Produkt aus Querschnitt des Wirbelfadens mit der Rotationsgeschwindigkeit = Wirbelintensität  
 ist constant längs eines Wirbelfadens. (Es ist aber auch von der Zeit unabhängig wie wir letztes Mal bewiesen haben.)  
 (Der Zusammenhang aus  $\text{div curl} = 0$  folgt)

Analoger Satz in Electr.: Stromintensität  $\times$  Querschnitt = Strommenge  
 über ganzen Leiter constant; was übrig

Wirbellinien können natürlich nicht in Flucht aufhören denn sonst wäre dort  $\text{div curl} \neq 0$ , von dem entweder in Oberfläche oder geschlossen



Man begnügt sich bis jetzt mit Untersuchung solcher Vorkommnisse wo einzelne Wirbelfäden mit Ringe; Aufgabe, wo kontinuierlich verteilte Wirbelintensität sind noch kaum gelöst.

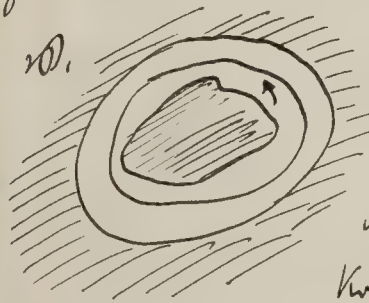
Ganz anders Potentialbewegung  
entspricht electr. Kraft in electr. Felde, oder magnet. Kraft in Felde welche  
von permanenten Magneten herrührt, oder auch electr. <sup>Stromen</sup> Strömung, kann auftreten  
wo  $\nabla^2 A = 0$ ; dadurch charakterisiert dass keine geschlossenen Stromlinien  
vorkommen sondern alle von Oberfläche zu Oberfläche verlaufen



Wohl zu unterscheiden zwischen Strom und Wirbelstrom!

Bei Wechselberg charakterisiert durch geschlossen in sich  
zurückkehrende Strömung.

Dabei jedoch eine Beschränkung: in <sup>indefinit</sup> einfach zusammenhängenden Räumen  
gibt es auch eine Art von geschl. Stromlinien, denen kein curl entspricht.



Dann hat zwar jedes einen endlichen Wert  
man kann es aber nicht setzen  $= \int S \cdot \text{Kunde} \, dV$   
und schließen dass  $\text{curl} \geq 0$ , weil Integral über feste  
Körper nicht ausgedeutet werden kann.

Da gibt es also auch eine Potentialbewegung mit geschl. Strömung, aber nur  
ein einziger. Doch mit diesem complicirtem Fall wollen wir uns jetzt nicht  
beschäftigen: In einem einfach zusammenhängenden Raum müssen alle  
Stromlinien von Oberfläche zu Oberfläche gehen, falls  $\text{curl} = 0$ .

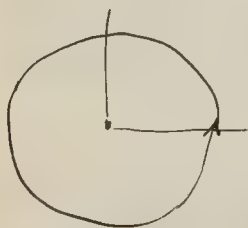
Wenn nun aber die Oberflächen starre Wände sind, so ist dies nicht  
möglich, daher gibt es keine Potentialbew. in einer solchen Siphon.

Und das bewirkt, dass diese Potentialbewegungen so wenig praktisch anwendbar sind.

4) Die gewöhnliche Art von Bewegung mit der Wirbelbewegung, Potentialbewegung sind nur Spezialfälle, welche gerade eine Ausnahme bilden. Aber viel leichter zu berechnen.

Auf etwas aber aufmerksam machen; daraus, dass bei Pot. Bewg die Partikeln nicht rotieren, folgt noch nicht, dass die Flüssigkeit als Ganzes nicht rotiert.

Beispiel: Zwei dimensionale Bewegung; Rotationsbewegung in einem Zylinder



$$a = \omega f(r) N$$

$$u = -f(r) \frac{\omega}{r} u$$

$$v = f(r) \frac{x}{r} \omega$$

Wenn wir  $f(r) = r$ , so rotiert das als starrer Körper

$$\text{curl } a = k \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 1 + 1 = 2\omega \quad \text{was wir schon von früher wissen}$$

Ebenso wenn  $f(r) = r^2$  etc.

Beym Spezialfall  $f(r) = \frac{1}{r}$

$$u = -\frac{y}{r^2} \omega$$

$$v = \frac{x}{r^2} \omega$$

$$\text{curl } a = k \omega \left( \frac{1}{r^2} - \frac{2x^2}{r^4} + \frac{1}{r^2} - \frac{2y^2}{r^4} \right) = 0 \quad \text{Das ist also eine Potentialbewegung.}$$

Bei der dreht sich allerdings die ganze Flüssigkeit herum.

Aber jedes Partikel bleibt sich parallel, so wie Erde um Sonne

Nun könnte man meinen das wir Widerspruch gegen früh erwähnte Satz dass im freien Raum keine Potenti. bewg; das ist aber nicht so; hier entsteht theoretisch ein curl und zwar unendlich groß in den O-Punkten, und das zeigt sich darin, dass die ein vorgegebenen symmetrischen Vektor der Differentialgleichung ist - Wird das Pot. durch ein Oval geteilt so dreht es sich theoretisch um.

Man kann auch so sagen:

so genau ist nicht möglich, dass diese Lösung überhaupt für einen vollen Raum nicht möglich; frange nur für Raum zwischen concentrischen Hohlzylinder, dann ist das aber eben ein doppelt zusammenhängender Raum, so wie wir gesagt haben, eine einzige Art von Tot Raum möglich ist.

Dieses Beispiel habe ich aber <sup>nur</sup> gewählt ~~um~~ weil es rechnerisch so einfach ist.

In Allgem. müssen bei Tot. R. die Wände beweglich sein.

Eine Art von Bewegung wo dies vorkommt ist daher sorgfältig durchgearbeitet worden: Fall wenn <sup>feste</sup> Körper in Flüssigkeit eingetaucht sind bewegen

Mathematisch sehr interessant aber ziemlich schwierig (Long Kugel)

Merkwürdiger überaus das Resultat, wenn Kugel sich im Wasser bewegt so erleidet sie keinen Widerstand solange die Bewegung ~~gleich~~ mit gleichförmiger Geschwindigkeit erfolgt. Auf Totraumkörper welche sich in der R. der Bewegung wird gar keine Zugkraft ausgeübt, Allerdings ~~nicht~~ <sup>so</sup> lange sich nicht die Bewegung derselben ändert, dann aber hat das denselben Effekt als ob die Masse des P festen Körpers vermehrt wäre. Wenn also die Masse reibungslose Flüssigkeit wäre, so einigiger Effekt auf die darin herumschwimmenden Körper, dass ihre Masse scheinbar vergrößert wäre.

In natürlichen Flüssigkeiten ist die Sache natürlich abgeändert, das kommt aber von der inneren Reibung her; dort muss fortwährend Arbeit auf die Bewegung des festen Körper verwendet werden, welche darauf geht um die Reibung zu



6) zu überwinden. Hier liegt alles constant kein Energieverbrauch.  
 Natürlich praktischer Bedeutung haben diese Resultate nicht.

Also Pot. liegt jeder elektrost. Aufgabe etc. abgehandelt ist.



Strömung in Hyperboloidfläche

Denn müsste der elektrische Oberflächenstrom gleich sein, oder irgendwie anders die Div. erzeugt werden.

Anderer Art von Aufgabe: Strahlenbildung; Strahl. kommt von  $\infty$  und geht in  $\infty$   
 Leiden bisher nur in dies in der betrachteten Raum interessiert uns  
 ihr Verhalten

zwei Dimensionen lösbar (Kirchhoff).

Also Strahlen, welche nicht aus ~~offenen~~ runden Löchern, sondern aus Spalten austreten.

In zwei Dimensionen wird nämlich überhaupt die Lösung der Gleichung  $\Delta \psi = 0$  sehr leicht. Da wird sie gleich  $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0$  und das ist die bekannte Gleichung welche in der Theorie der complexen Functionen vorkommt.

Nimmt man irgend eine Function  $f(x+iy)$  und spaltet sie in den reellen und imaginären Theil  $= \varphi + i \psi$  so genügt sowohl  $\varphi$  als auch  $\psi$  dieser Gleichg.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$= f'$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = i f'$$

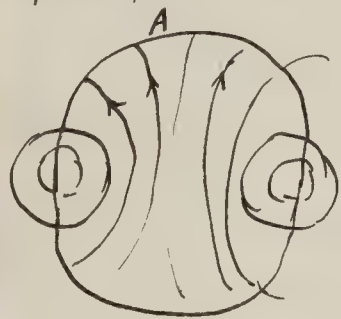
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -f''$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + i \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right)$$

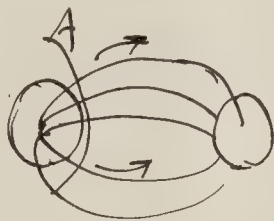
also  $\psi'' = 0$

Daher ist es so einfach Lösung dieser Gleichung zu finden, und mögliche Fließgeschwindigkeiten aufzusuchen.

Man kann dann ~~den~~ ~~selbst~~ entweder  $\varphi$  oder  $\psi$  als gegeben Potential auffassen, die Stromlinien stehen dann  $\perp$  dazu



2D. Einfache Lösung  $\psi =$



Wenn man also irgend eine Lösung hat, so kann man immer sofort eine von den Stromlinien sich als feste Wand denken und erhält so Strömung zwischen Wänden. Natürlich ist es schwer, wenn die Wandform von vornherein gegeben ist die zugehörige Lösung zu finden. Man verfährt da eher umgekehrt, Probieren was herauskommt.

Ähnlich auch Strahlen; das ist im ersten Moment auffallend dass hier Strahlen vorkommen, während in Elektrostat. etc. nichts Analoges besteht.

Richtet ~~sich~~ von der Zustandsgleichg. I her, die wir jetzt gar nicht berücksichtigen haben und welche den Druck bestimmt; das ist nämlich dass  $p$  immer  $> 0$  sein muss, sonst reißt die Flüssigkeit auseinander.

Noch eine Art von Aufgaben, und zwar solche welche auf praktisch realisierbare Wellenbewegungen

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad c = \nabla A$$

$$\frac{\partial A}{\partial t} = P - \frac{p}{\rho} = g z - \frac{p}{\rho} + \text{const.}$$

$$\frac{1}{g} \left( \frac{\partial A}{\partial t} \right)_{z=0}$$

$$u = \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{1}{g} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = \frac{\partial A}{\partial z}$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = g \frac{\partial A}{\partial z} \Big|_{z=0}$$

$$A = f(z) \cos(kx + \omega t) \quad \nabla^2 A = 0$$

$$-k^2 f + \frac{d^2 f}{dz^2} = 0$$

$$A = a \sin(kz + \omega t)$$

$$f(z) = \frac{1}{k} \sin(kz)$$

$$f(z) = \frac{1}{k} \sin(kz)$$

$$f = M e^{+kz} + N e^{-kz}$$

$$f = -\frac{1}{k} \sin(kz)$$

$$\frac{dA}{dz} = 0$$

$$\text{daher } M e^{-kh} = N e^{kh} = \frac{C}{k}$$

$$A = C \left[ e^{k(z+h)} + e^{-k(z+h)} \right] \cos(kx + \omega t)$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} = -m^2 A \quad \frac{\partial A}{\partial z} \Big|_{z=0} = C k (e^{kh} - e^{-kh}) \cos(kx + \omega t)$$

$$\text{woraus folgt: } \frac{m}{k} = \frac{e^{kh} + e^{-kh}}{e^{kh} - e^{-kh}}$$

$$\text{Für große Wassertiefe } v = \sqrt{\frac{g \lambda}{2\pi}}$$

$$\text{kleine } = \sqrt{g h}$$

$$\text{mit } \xi = \dots \sin(kx + \omega t) \dots$$

# Vector Analysis und Quaternionen mit Rücksicht auf deren Anwendung

107

## in der Physik.

- 1). Geometrische, physikalische Scalar und Vectorgrößen (Beispiele)
- 2). Die Operationen die mit letzteren vorgenommen werden hauptsächlich zweierlei Art:  
Translatorische Parallelverschiebung und Rotation
- 3). Bezüglich ersterer gilt das assoc., com., distr. Geth., wird die gleichg. Vektoren identisch  
resp. Subtraction  
mit Addition, daher auch sonst sogenannten. ~~Beispiele~~ Differentialquotienten von Vektoren  
nach Scalaren Unabhängigen. (Beispiele: Polyeder, Gleichungen von Geraden, Curven,  
Mechanik eines freien Punktes, Kräfteparallelogramm, Schwerpunkt, Systeme freier  
Punkte in der kinetischen Gastheorie, Mittelwerte von Vektoren doppeltgrößen).
- 4). Bei Rotation gilt ~~Assoziativ~~ assoc. und distr. Geth. aber nicht com., genannt  
Multiplikation, Unterschied derselben gegen gewöhnl. Multipl. Inverse Qu = Quotient  
Sowohl durch Vector Algebra, die Einführung der Quaternionen bringt eine übersichtliche  
Vereinfachung gegenüber jener hervor, wie Einführung der imaginären Größen in d. Algebra.  
Unterschiede der Notation bei Hamilton-Tait, Grassman, Heaviside, Pöpgl.  
Multiplikation und Division durch die  $i, j, k$ . (Beispiele analog den Obg.)
- 5). Transformationsformeln und Interpretation derselben. Das Hamilton'sche  $\nabla =$   
 $\text{div} + \text{curl}$  (Heaviside). Die Operation  $\nabla^2$  und  $(\nabla \cdot)$ . Beispiele  
~~physikalische~~  
6). Systematische Behandlung der Hydrodynamik ~~und Statik~~  
7). --- --- Maxwell'sche Elektrodynamik  
8). Eventuell: Selbstorganisierte Funktionen, Elastizitätslehre.



# Vorlesungsverzeichnis:

- 1). Grundlagen und physikalische Anwendungen der Vector Algebra und Quaternionen-Rechnung.
- ~~2). Wärmeleitung und Strahlung~~
- 2). Strahlende Energie (Licht und Wärmestrahlung, Spectralanalyse)
- 3). Kinetische Gastheorie
- 4). Physikalische Chemie
- 5). ~~Hydrodynamik~~ Elastizitätstheorie

Hydrodynamik

Druck

Wärmestr.

# Vorlesungs-Programm.

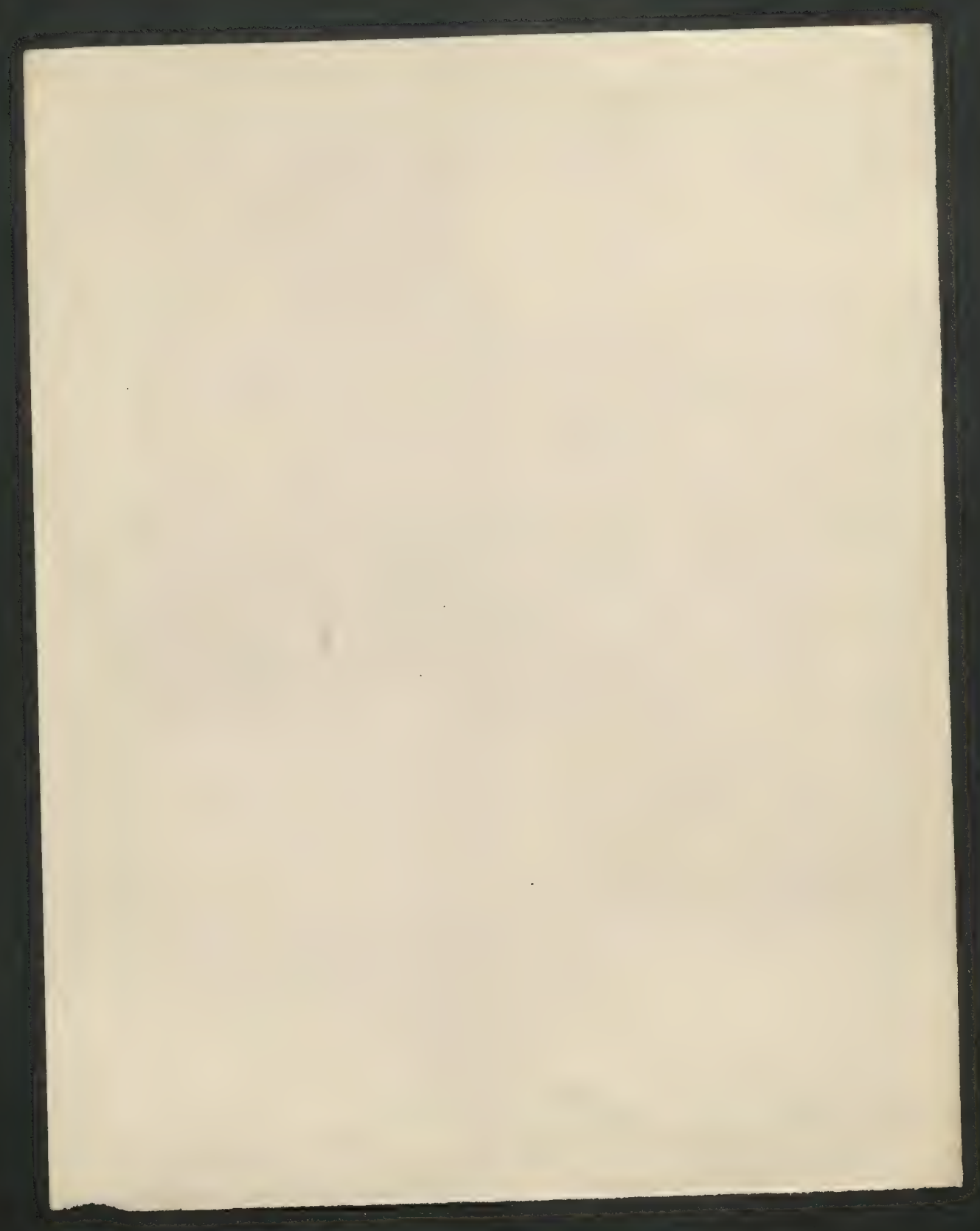
108

Der Fakultät steht beabsichtigt ~~folgende Collegien~~ in den nächsten Semestern folgende Collegien abzuhalten, falls ihnen die vereinbarte Summe für Physik zugeteilt wird:

I). Vector-Algebra und Quaternionen Rechnung mit Rücksicht auf deren Anwendungen in der Physik. (2 stündig)

Zuerst sollen die Begriffe der Vektor-Rechnung (nach Heaviside, Pöppel) und die elementaren Operationen auseinander <sup>es eines Symbols</sup> gesetzt werden, dann folgt ~~erst~~ die Einführung des Begriffes der Quaternion, welcher eine ähnliche Vereinfachung im Calcul hervorbringt, wie die <sup>complexen Systeme</sup> ~~in der~~ in der Algebra. Das Hauptgewicht wird <sup>dabei</sup> auf die geometrische Anschauung und auf die physikalischen Anwendungen, gelegt werden. Zum Schluss folgt eine <sup>zusammenfassende</sup> Darstellung der Grundlage der Hydrodynamik und der Maxwell'schen Electrodynamik unter Benützung dieser ~~Rechnungsart~~ Rechnungsart.

II). Strahlung der Energie. (Wärme- und Lichtstrahlung, Spectralanalyse). (einstündig). In dieser Vorlesung sollen das Kirchhoff-Plancksche Gesetz, Stefans Strahlungsgesetz und einflussreiche theoretische Untersuchungen (Doltmann, W. Wien), ~~sowie die~~ besprochen, ~~sowie~~ und die experimentelle



100  
Untersuchungen von Langley über Wärmestrichly, sowie insbesondere  
<sup>etw.</sup>  
die Ergebnisse der Spectral Analyse dargestellt werden.

III). ~~Ausgewählte Kapitel~~ <sup>auswahl</sup> aus der physikalischen Chemie

(Atom- und Molekulargewichte in ihrer Beziehung zu physikalischen  
Prozessen). (2 stündig).

In diesen Vorlesungen sollen die Grundle-  
gen Gegenstande dieser Vorlesung sein: ~~Electric~~ Dampfdruck, Sättigungsdampf-  
druck, Dampfdruck, osmotischer Druck, Gefrierpunktniedrigung,  
Electrolyse.

IV). Kinetische Gastheorie (2 stündig)

Diese Vorlesung sollen die Studierenden mit den Grundlagen  
der Theorie in der ~~klassischen~~ <sup>Clausius'schen</sup> Behandlungsweise, und mit ~~den~~  
~~Clausius' Berechnungen~~ <sup>Untersuchungen</sup> bekannt machen.  
den Ergebnissen <sup>von</sup> Maxwell's und Boltzmann's Untersuchungen bekannt machen.



